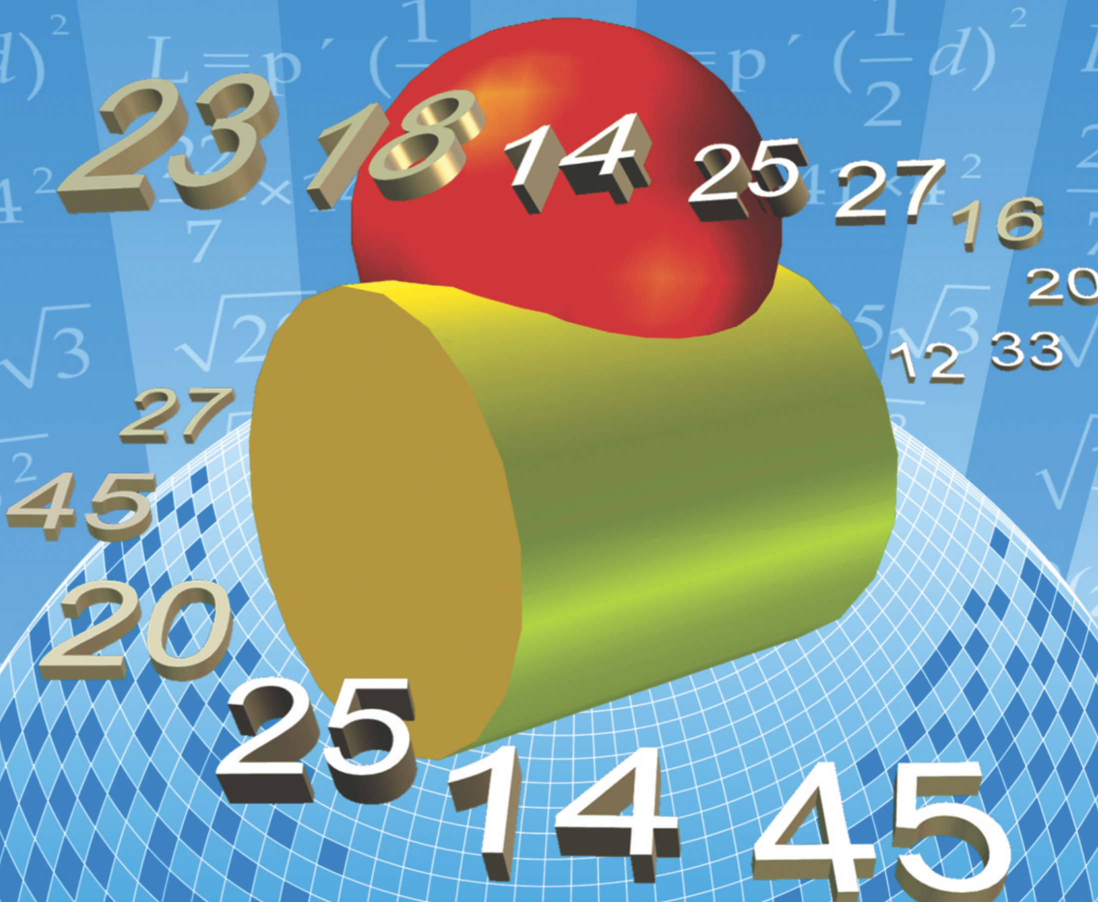
Sri Lestari • Diah Ayu Kurniasih

MATEMATIKA 2

Untuk SMA/MA Program Studi IPS Kelas XI



PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

• Sri Lestari • Diah Ayu Kurniasih

MATEMATIKA

Untuk SMA/MA Program Studi IPS Kelas XI

2

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

MATEMATIKA

untuk SMA/ MA Kelas XI Program IPS

Sri Lestari
Diah Ayu Kurniasih

Editor	:	Zuly Puspita Beaty
Penata letak	:	Ria Nita Fatimah
Perwajahan	:	Cahyo Muryono
Ilustrasi isi	:	Bayu Aryo Dewantho
Penata sampul	:	Hary Suyadi
Ukuran Bukuk	:	17,6 x 25 cm

510.07
SRI SRI Lestari
m Matematika 2 : untuk SMA / MA Program Studi IPS Kelas XI / Sri Lestari, Diah Ayu Kurniasih; editor, Zuly Puspita Beaty ; ilustrasi, Budi Aryo Dewantho. — Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2009.
vii, 212 hlm, : ilus. ; 25 cm

Bibliografi : hlm. 205
Indeks
ISBN 978-979-068-846-9 (no. jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-851-3

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Diah Ayu Kurniasih III. Zuly Puspita Beaty
IV. Budi Aryo Dewantho

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2009

Diperbanyak oleh ....

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2009, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/ penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81 tahun 2008 11 Desember 2008

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2009
Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Puji syukur senantiasa kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena dengan rahmat dan karunia-Nya kami dapat menyelesaikan buku Matematika untuk SMA/ MA dengan lancar dan baik. Buku ini kami susun sesuai dengan standar isi kurikulum 2006.

Buku ini disajikan dengan pendekatan pemecahan masalah. Dengan pendekatan ini, siswa diharapkan dapat aktif dalam pembelajaran dan memiliki ketrampilan dalam memahami masalah, membuat model matematika, menyelesaikan masalah, dan menafsirkan solusinya. Selain itu, buku ini juga disajikan dengan bahasa yang lugas dan sederhana sehingga mudah dipahami.

Telah kita ketahui bahwa untuk menguasai dan menciptakan teknologi masa depan diperlukan penguasaan matematika yang kuat sejak dini. Dengan pola penyajian buku ini, diharapkan dapat membantu dan mempermudah pemahaman matematika siswa. Setelah memahami matematika secara komprehensif, siswa akan memiliki sikap ulet dan percaya diri dalam memecahkan masalah dalam kehidupan sehari–hari.

Akhirnya kami menyadari bahwa buku ini tidaklah sempurna. Segala kritik dan saran membangun untuk menyempurnakan buku ini sangat kami nantikan. Kepada semua pihak yang membantu terselesainya buku ini, kami ucapkan terima kasih. Semoga buku ini bermanfaat bagi semua pihak. Selamat belajar dan semoga sukses!

Surakarta, Mei 2008

Penulis

Daftar Isi

Daftar Notasi

Notasi	Keterangan
$n(A)$	banyak anggota kejadian A
$n(S)$	banyak anggota ruang sampel
n	banyak data
k	banyak kelas
x_{maks}	data terbesar
x_{min}	data terkecil
D	desil
!	faktorial
f	frekuensi
F_h	frekuensi harapan
F	frekuensi kumulatif
$f(x)$	fungsi dari x
Σ	gabungan
H	hamparan/ jangkauan antarkuartil
I	identitas
Σ	irisan (intersection)
Σ	jumlah beruntun (sigma)
C_r^n	kombinasi r unsur dari n unsur
A^c	komplemen kejadian A
Q	kuartil
L	langkah
	mean (rata–rata hitung) data
Me	median
Mo	modus
x_i	nilai data ke–i
p	panjang kelas
$P(A)$	peluang kejadian A
$P(A^c)$	peluang komplemen kejadian

Bab 1
Statistika

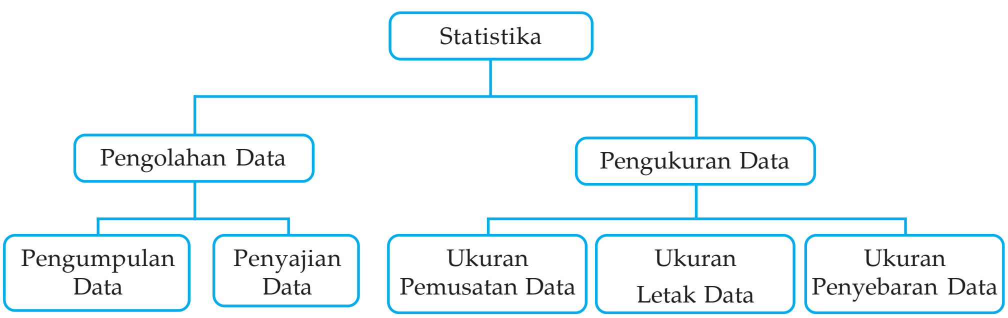
Standar Kompetensi

Menggunakan aturan statistika, kaidah pencacahan, dan sifat-sifat peluang dalam pemecahan masalah

Kompetensi Dasar

- Membaca data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis, lingkaran, dan *ogive*
- Menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis, lingkaran, dan *ogive* serta penafsirannya
- Menghitung ukuran pemusatan, ukuran letak, dan ukuran penyebaran data serta menafsirkannya

Peta Konsep



Sumber: www.viewimages.com

Gambar 1.1

Apabila Anda mengamati dalam kehidupan sehari–hari, sebenarnya banyak sekali permasalahan yang berkaitan dengan angka–angka. Misalnya dalam bidang ekonomi, pertanian, perindustrian, pendidikan, pemerintahan, dan olahraga. Pelaporan hasil pengamatan yang diperoleh berupa angka–angka yang disusun dalam bentuk tertentu.

Bagaimana cara seseorang menyampaikan dan menyimpulkan informasi yang diperolehnya? Coba Anda simak permasalahan berikut!

Pernahkah Anda menonton motor grand prix di televisi dari mulai sampai selesai? Dalam setiap balapan, Anda pasti ingin mengetahui siapa pembalap yang berada di posisi terdepan sampai terakhir. Meskipun mendengarkan informasinya di televisi, Anda belum tentu dapat memperoleh informasinya dengan jelas. Hasil kualifikasi motor grand prix menjadi lebih mudah dibaca bila disajikan dalam tabel berikut.

Di posisi berapa pembalap favorit Anda?

Tabel 1.1 Hasil kualifikasi Motor Grand Prix 2008 di Qatar Grand Prix

Posisi	Nama Pembalap	Waktu
1.	Casey Stoner	42:36.587
2.	Jorge Lorenzo	42:41.910
3.	Dani Pedrosa	42:47.187
4.	Andrea Dovizioso	42:49.875
5.	Valentino Rossi	42:49.892
6.	James Toseland	42:50.627
7.	Colin Edwards	42:51.737
8.	Loris Capirossi	43:9.092
9.	Randy de Puniet	43:9.590
10.	Nicky Hayden	43:14.941

Sumber: www. Crash. Net, 9 Maret 2008

Berapakah rata–rata waktu yang diperlukan seluruh pembalap dalam menyelesaikan perlombaan?

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, pada bab ini akan dibahas mengenai statitiska yang meliputi penyajian data dalam berbagai bentuk dan pengolahan data untuk membuat kesimpulan dari data tersebut. Setelah mempelajarinya, Anda diharapkan dapat menyajikan data, mengolah data dan menyimpulkan data yang diperoleh dari permasalahan sehari–hari.

A. Statistik dan Statistika

Data tentang kurs rupiah terhadap mata uang asing, data penjualan mobil matik, data tingkat ekspor–impor kain batik, dan data nilai ujian akhir matematika merupakan beberapa contoh permasalahan yang sebagian besar berupa angka. Perhatikan salah satu contoh data kurs rupiah terhadap mata uang asing berikut ini.

Data transaksi jual beli rupiah terhadap mata uang asing yang berupa angka–angka disajikan dalam tabel 1.2.

Tabel 1.2 Kurs transaksi Bank Indonesia (Rabu, 15 Agustus 2007)

Mata Uang		Jual (Rp) (*Selling*)	Beli (Rp) (*Buying*)
Australia	AUD	7.860,13	7.780,03
Brunei	BND	6.173,20	6.108,17
Kanada	CAD	8.829,58	8.736,80
Swiss	CHF	7.796,12	7.716,62
Denmark	DKK	1.716,90	1.698,88
Euro	EUR	12.773,42	12.644,42
Inggris	GBP	18.835,22	18.644,96
Hong Kong	HKD	1.207,58	1.195,46
Jepang	JPY (100)	8.043,77	7.962,36
Malaysia	MYR	2.709,02	2.678,99
Norwegia	NOK	1.601,72	1.584,16
Selandia Baru	NZD	6.813,62	6.743,01
Papua Nugini	PGK	3.336,92	3.085,83
Filipina	PHP	204,66	202,40
Swedia	SEK	1.368,32	1.353,53
Singapura	SGD	6.173,20	6.108,17
Thailand	THB	276,57	273,58
Amerika Serikat	USD	9.445,00	9.351,00

Sumber: Solopos, 16 Agustus 2007 (bi.go.id)

Dengan mengamati data yang terlihat pada tabel 1.2, Anda akan lebih mudah untuk mengetahui posisi rupiah terhadap mata uang. Kumpulan data ini disebut statistik.

Sehingga, dapat dikatakan bahwa:

Statistik adalah kumpulan angka atau nilai yang menggambarkan karakteristik suatu kumpulan data.

Sedangkan, ilmu pengetahuan yang mempelajari statistik disebut statistika. Dapat dikatakan bahwa:

Statistika adalah ilmu pengetahuan yang berhubungan dengan cara–cara pengumpulan, pengolahan, penyajian dan penafsiran data serta penarikan kesimpulan dari data tersebut.

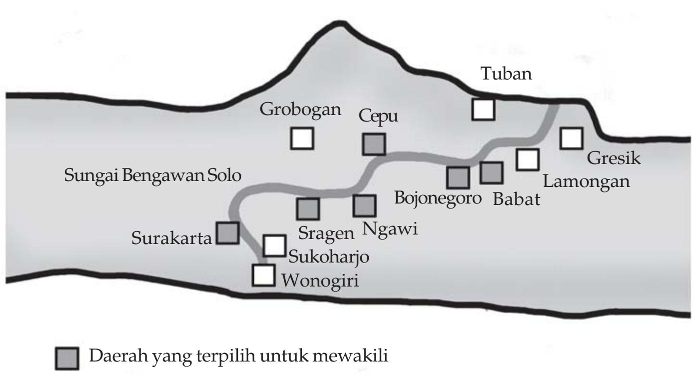
Info Matematika

Kata statistika berasal dari bahasa Italia, yaitu statista yang berarti negarawan. Istilah ini pertama kali digunakan oleh Gottfried Achenwall (1719–1772), seorang profesor pada Marlborough dan Gottingen. Kemudian Zimmeman memperkenalkan istilah statistika di Inggris. Penggunaan statistika ini dipopulerkan oleh John Sinclair dalam pekerjaannya di Statistical Account of Scotland (1791–1799). Jadi, jauh sebelum abad 18 umat manusia sudah melakukan pencatatan dan penggunaan data.

1. Populasi dan Sampel

Untuk memahami pengertian populasi dan sampel, simaklah deskripsi pada contoh berikut ini.

Banjir yang melanda beberapa daerah di Jawa Tengah dan Jawa Timur dari tanggal 26 Desember 2007 terjadi akibat adanya luapan air sungai Bengawan Solo. Banjir ini mengakibatkan beribu–ribu hektar persawahan yang terendam banjir dan gagal panen. Daerah–daerah yang terendam banjir dapat Anda lihat pada gambar berikut ini.



Gambar 1.2

Bila ada petugas dari dinas pertanian akan meneliti kerusakan areal persawahan yang terendam banjir, apakah petugas itu harus meneliti ke seluruh daerah? Tentunya tidak perlu. Petugas tersebut cukup meneliti

beberapa daerah saja yang dianggap mewakili. Misalnya, hanya mengambil 6 daerah saja seperti pada gambar yang diarsir.

Seluruh daerah yang areal persawahannya terendam banjir disebut populasi, sedangkan 6 daerah yang dianggap mewakili disebut sampel.

Dari contoh di atas, populasi dan sampel didefinisikan sebagai berikut.

Populasi adalah seluruh objek yang akan diteliti
Sampel adalah bagian dari populasi yang benar–benar diamati.

Coba Anda sebutkan beberapa contoh lain yang termasuk populasi dan sampel! Mudah sekali, bukan?

2. Data

Statitiska selalu berhubungan dengan data. Tahukah Anda, apakah data itu? Untuk menjawabnya, perhatikan contoh tabel berikut ini!

Tabel 1.3 Areal persawahan yang terendam banjir

Daerah	Luas areal (hektar)	Kerusakan
Kecamatan A	8	Tidak parah
Kecamatan B	11	Cukup parah
Kecamatan C	10	Cukup parah
Kecamatan D	15	Sangat parah
Kecamatan E	14	Sangat parah
Kecamatan F	7	Tidak parah

Kumpulan bilangan–bilangan 8, 11, 10, 15, 14, dan 7 pada tabel di atas disebut data. Sehingga data dapat didefinisikan sebagai berikut.

Data adalah kumpulan dari informasi atau keterangan yang diperoleh baik dalam bentuk angka dan bukan angka (tulisan).

Dari pengertian di atas, apakah kerusakan tidak parah, cukup parah, dan sangat parah juga disebut data?

Data tentang faktor kerusakan areal yang tercantum pada tabel termasuk data kualitatif, sedangkan luas areal persawahan termasuk data kuantitatif. Jadi, apa perbedaan data kualitatif dan kuantitatif?

Data kualitatif adalah data yang menunjukkan keadaan atau sifat objek.

Data kuantitatif adalah data yang menunjukkan jumlah atau ukuran objek.

Dengan menggunakan data, seorang peneliti dapat menggunakannya sebagai bahan untuk membuat keputusan dari kesimpulan yang diperoleh. Data statistik dapat dikumpulkan dengan menggunakan prosedur yang sistematis, antara lain dari pengamatan (observasi), wawancara (interview), kuesioner (angket) dan dokumentasi (review). Apakah ada cara lain untuk mengumpulkan data?

Latihan 1

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Dengan menggunakan kalimat Anda sendiri, berilah penjelasan apa yang dimaksud dengan istilah berikut!
   a. Statitiska dan statistik
   b. Sampel dan populasi
2. Untuk kegiatan–kegiatan berikut ini, manakah yang disebut sampel dan populasi?
   a. Dari 40 siswa kelas XI program IPS, dipilih 3 siswa untuk diikutsertakan lomba cerdas cermat tingkat nasional.
   b. Avin mengambil 3 buah apel dari satu keranjang yang ada di meja makan.
   c. Vani mencicipi satu sendok jus jeruk dari satu gelas yang dibuatnya.
3. Apakah kriteria tinggi, sedang, rendah dari kualitas panen padi dapat disebut data?
4. Satu kelas terdiri dari 50 siswa. Dari 50 siswa dipilih 5 siswa untuk dijadikan kandidat ketua OSIS periode baru. Hasil tes yang diperoleh dari 5 siswa tersebut disajikan pada tabel berikut ini.

No.	Nama	Nilai Tes Tertulis	Nilai Tes Lesan	Bakat Kepemimpinan
1.	Arya	75	80	Cukup
2.	Bani	80	80	Baik
3.	Candra	90	90	Baik
4.	Dewi	75	85	Cukup
5.	Elisa	85	70	Kurang

   a. Berdasarkan keterangan di atas, manakah yang disebut sampel dan manakah yang disebut populasi?
   b. Sebutkan manakah yang termasuk data kuatitatif, dan data kuantitatif?

5. Tentukan apakah data berikut ini merupakan data kualitatif atau kuantitatif!
   a. Data pemain sepak bola yang terkena kartu merah selama satu sesi pertandingan.
   b. Data banyaknya mobil yang parkir dari jam 07.00 WIB sampai 15.00 WIB
   c. Data cita–cita siswa kelas XI program IPS setelah lulus sekolah.

B. Penyajian Data

Data yang diperoleh dari suatu penelitian seringkali terlalu besar nilainya dan dalam jumlah yang banyak. Coba Anda bayangkan betapa rumitnya mengolah data seperti itu. Untuk keperluan laporan, data perlu disusun dan disajikan dalam bentuk yang jelas dan mudah dimengerti. Bagaimanakah bentuk penyajiannya? Data statistik dapat disajikan dalam berbagai bentuk yaitu tabel dan diagram.

1. Penyajian Data dalam Bentuk Tabel

a. Tabel Baris Kolom

Sebelum membahas lebih lanjut, coba Anda ingat kembali pelajaran di SMP tentang bagaimana cara membuat tabel. Untuk mengingat kembali, perhatikan contoh berikut ini!

Seorang petugas dari kecamatan Sukacerdas ditugaskan untuk mendata jumlah anak yang bersekolah dalam satu kecamatan. Untuk membuat laporannya, petugas tersebut membuat sebuah tabel sebagai berikut.

Tabel 1.4 Data siswa kecamatan Sukacerdas tahun 2007/2008

Tingkat Sekolah	Banyaknya Siswa		Jumlah Siswa
	Laki–laki	Perempuan	
SD	680	875	1555
SMP	590	820	1410
SMA	565	545	1110
SMK	215	225	440
Jumlah	2050	2465	4515

Dari tabel 1.4 dapat Anda lihat bahwa data–data yang diperoleh petugas tersebut dituliskan dalam bentuk kolom dan baris. Sehingga dapat didefinisikan bahwa:

Tabel baris–kolom adalah kumpulan data yang disajikan dengan tabel berbentuk baris dan kolom.

Begitu mudah, bukan? Cara menyajikan data dalam tabel baris–kolom masih sederhana. Marilah kita pelajari bentuk tabel yang lebih kompleks.

b. Tabel Distribusi Frekuensi

Apabila dalam suatu penelitian diperoleh data yang banyak dan kembar, maka untuk menyimpulkannya perlu disajikan dalam bentuk yang lebih sederhana. Bagaimanakah cara menyederhanakannya? Mudah sekali, yaitu dengan menentukan banyak nilai amatan yang sama (kembar) atau banyak nilai amatan yang terletak pada interval tertentu.

Banyak nilai amatan seperti ini disebut frekuensi. Selanjutnya, nilai amatan bersama frekuensinya dapat disajikan dalam sebuah tabel, yaitu tabel distribusi frekuensi.

1) Tabel Distribusi Frekuensi Tunggal

Untuk memahami cara menyajikan data dalam tabel distribusi frekuensi tunggal, simaklah kumpulan data nilai ulangan harian matematika dari 30 siswa kelas XI program IPS berikut ini.

7	8	6	8	7	7
6	6	6	7	7	7
7	7	8	6	6	6
7	7	5	5	7	7
6	6	8	8	5	6

Dari kumpulan data di atas, terdapat nilai amatan yang sama, yaitu:

a) nilai amatan 5 muncul sebanyak 3 sehingga frekuensinya $f = 3$;
b) nilai amatan 6 muncul sebanyak 10 sehingga frekuensinya $f = 10$;
c) nilai amatan 7 muncul sebanyak 12 sehingga frekuensinya $f = 12$;
d) nilai amatan 8 muncul sebanyak 5 sehingga frekuensinya $f = 5$.

Data–data di atas tentu saja lebih praktis dan mudah dibaca bila disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut.

Tabel 1.5 Data nilai ulangan harian Matematika

Nilai (x_i)	Tally	Frekuensi (f_i)
5	///	3
6	~~////~~ ~~////~~	10
7	~~////~~ ~~////~~ //	12
8	~~////~~	5
Jumlah		$\Sigma f_i = 30$

Tabel seperti ini disebut tabel distribusi frekuensi tunggal, dimana tally merupakan tanda yang menunjukkan banyaknya data. Jumlah total frekuensinya selalu sama dengan banyaknya data, yaitu 30.

2) Tabel Distribusi Frekuensi Berkelompok

Sebelumnya, kita telah membahas mengenai penyajian data tunggal. Bagaimanakah cara penyajiannya bila data yang diperoleh cukup banyak dan beragam?

Misalnya, data tinggi badan siswa kelas XI program IPS yang berjumlah 20 siswa berikut ini.

157	145	149	167
150	173	162	164
175	161	160	151
156	165	158	163
154	166	172	168

Jika data tinggi badan (dalam cm) di atas Anda sajikan dalam bentuk seperti tabel 1.5, maka Anda akan memperoleh tabel yang sangat panjang, yaitu terdiri dari 20 baris. Agar lebih sederhana, data di atas dapat Anda sajikan dalam bentuk tabel berikut ini.

Tabel 1.6 Data tinggi badan siswa kelas XI program IPS

Nilai (x_i)	Tally	Frekuensi (f_i)
145–149	//	2
150–154	///	3
155–159	///	3
160–164	~~////~~	5
165–169	////	4
170–175	///	3
Jumlah		$\Sigma f_i = 20$

Tabel seperti ini disebut tabel distribusi frekuensi berkelompok.

Beberapa istilah yang perlu Anda kenal dalam pembuatan tabel frekuensi, antara lain:

a) Kelas

Kumpulan data pada contoh di atas, dikelompokkan menjadi tujuh kelas, yaitu kelas pertama 145–149, kelas kedua 150–154, dan seterusnya (lihat tabel 1.6).

b) Banyak kelas

Banyaknya kelas ditunjukkan oleh banyaknya kelompok nilai dalam tabel. Dari tabel 1.6, diketahui data dikelompokkan menjadi 7 kelompok, yang diperoleh dengan menggunakan persamaan:

$$k = 1 + 1{,}3 \log n$$

dengan k = banyak kelas
n = banyak data

c) Batas kelas

Batas kelas adalah nilai–nilai ujung yang terdapat pada sebuah kelas.

Nilai ujung bawah suatu kelas disebut batas bawah dan nilai ujung atas suatu kelas disebut batas atas. Dari tabel 1.6, batas bawah untuk kelas pertama adalah 145, sedangkan batas atasnya 149. Berapakah batas bawah dan atas untuk kelas yang lain?

d) Tepi kelas

Kumpulan data yang diperoleh dari hasil pengukuran dengan ketelitian sampai satuan terdekat mempunyai tepi kelas, yaitu:

Tepi bawah= batas bawah – 0,5
Tepi atas = batas atas – 0,5

Tepi bawah sering disebut batas bawah nyata, dan tepi atas juga sering disebut batas atas nyata.

Tepi kelas untuk kelas kedua pada tabel 1.6, yaitu:

- Tepi bawah = 150 – 0,5 = 149,5;
- Tepi atas = 154 – 0,5 = 153,5.

Dengan cara yang sama, coba Anda tentukan tepi kelas untuk masing–masing kelas pada tabel 1.6.

e) Panjang kelas

Panjang kelas sering disebut interval kelas atau lebar kelas. Jika masing–masing kelas mempunyai interval yang sama maka panjang kelas didefinisikan sebagai berikut.

Panjang kelas = tepi atas – tepi bawah

Dari tabel 1.6, panjang kelas pertama dan kedua, yaitu:

- panjang kelas pertama = 149,5 – 144,5 = 5;
- panjang kelas kedua = 154,5 – 149,5 = 5.

Demikian seterusnya, hingga diperoleh panjang kelas untuk masing–masing kelas adalah sama, yaitu 5.

f) Titik tengah kelas

Titik tengah kelas merupakan nilai yang dapat dianggap mewakili kelas itu. Titik tengah kelas juga disebut nilai tengah kelas atau rataan yang dinyatakan dengan:

$$\text{Titik tengah} = \frac{1}{2}\ (\text{batas bawah} + \text{batas atas})$$

Misalnya, data tabel 1.6 mempunyai titik tengah untuk kelas pertama dan kedua yaitu:

- Titik tengah kelas pertama $= \frac{1}{2}(145 + 149) = 147$;
- Titik tengah kelas kedua $= \frac{1}{2}(150 + 154) = 152$.

Setelah memahami istilah–istilah tersebut, bagaimanakah cara membuat sebuah tabel distribusi frekuensi dari suatu kumpulan data? Untuk mempelajarinya, cermatilah contoh berikut ini.

Contoh 1.1

Data skor angket kegiatan berkemah siswa kelas XI program IPS adalah:

50	89	88	88	65	75
82	57	61	68	75	71
48	57	62	80	75	80
75	72	75	71	79	81
79	75	64	74	68	82

Susunlah data di atas dalam tabel distribusi frekuensi!

Jawab:

1. Data diurutkan terlebih dahulu dari yang terkecil ke data terbesar.

48	62	71	75	79	82
50	64	71	75	79	82
57	65	72	75	80	88
57	68	74	75	80	88
61	68	75	75	81	89

2. Dari urutan data tersebut diperoleh jangkauan/range (R) yaitu:

$$\boxed{R = \text{data terbesar} - \text{data terkecil}}$$
$$= 89 - 48$$
$$= 41$$

3. Banyaknya kelas ditentukan dengan menggunakan kaidah *empiris Sturgess*.
   Untuk n = 30 maka banyak kelas
   $$\begin{aligned} k &= 1 + 3{,}3 \log n \\ &= 1 + 3{,}3 \log 30 \\ &= 1 + 3{,}3 \times 1{,}477 \\ &= 1 + 4{,}8741 \\ &= 5{,}8741 \end{aligned}$$
   Banyak kelas 5,8741 dibulatkan ke atas menjadi 6.
4. Panjang kelas
   Panjang kelas juga dapat ditetapkan sebagai perbandingan antara rentang kelas dengan banyak kelas.
   $$\text{Panjang kelas} = \frac{\text{range}}{\text{banyak kelas}} \Rightarrow \boxed{p = \frac{R}{k}}$$
   Maka diperoleh:
   $$p = \frac{R}{k} = \frac{41}{6} = 6{,}83$$
   (dibulatkan ke atas menjadi 7)
5. Dalam menentukan batas bawah kelas pertama, biasanya digunakan data terkecil, yaitu 48.
6. Selanjutnya, kelas interval pertama ditentukan dengan cara menjumlahkan batas bawah kelas dengan p dikurangi 1.
   $$\boxed{\text{Kelas pertama} = \text{batas bawah} + p - 1} \quad = 48 + 7 - 1 = 54$$
7. Setelah semua kelas–kelas ditentukan, maka untuk keperluan pengolahan data dapat Anda tentukan titik tengah dan tepi kelasnya untuk masing–masing kelas.
8. Selanjutnya, tentukan frekuensi tiap kelas dengan menggunakan tally.

Dari statistik yang diperoleh dari langkah ke–1 sampai ke–8, kumpulan data skor angket dapat dituliskan dalam tabel distribusi frekuensi berkelompokberikut.

Tabel 1.7 Data skor angket kegiatan berkemah

Skor angket	Tally	Titik tengah	Tepi kelas	Frekuensi
48–54	//	51	47,5–54,5	2
55–61	///	58	54,5–61,5	3
62–68	~~////~~	65	61,5–68,5	5
69–75	~~////~~ ~~////~~	72	68,5–75,5	10
76–82	~~////~~ //	79	75,5–82,5	7
83–89	///	86	82,5–89,5	3

2. Penyajian Data dalam Bentuk Diagram

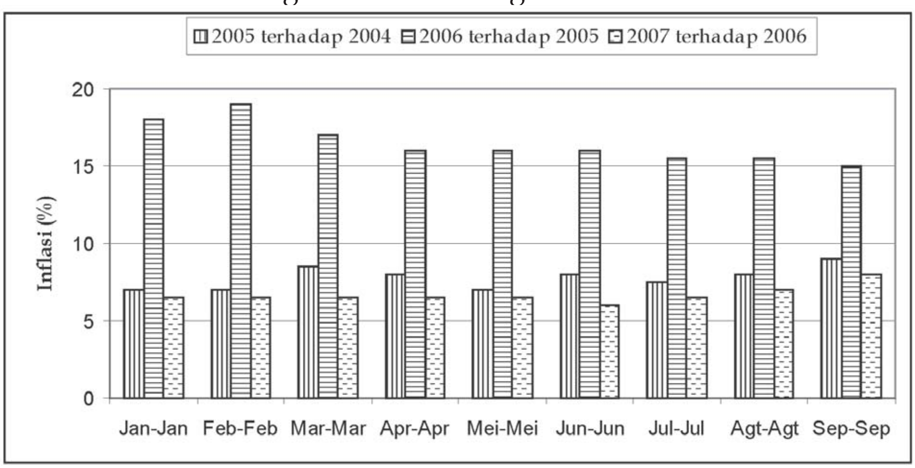
a. Diagram Batang

Untuk menyajikan data dalam bentuk diagram, coba Anda ingat kembali cara menentukan kooordinat pada sumbu X dan sumbu Y. Sumbu mendatar menunjukkan sumbu X, dan sumbu tegak menunjukkan sumbu Y.

Perhatikan contoh berikut ini!

Pertumbuhan ekonomi Indonesia yang dicapai dalam kurun waktu 3 tahun terakhir ini mengalami kenaikan rata–rata di atas 5 persen. Data yang dituangkan dalam laporan akhir tahun 2007 ini dinyatakan dalam diagram berikut.

Gambar 1.3 Perbandingan Inflasi Bidang Ekonomi Tahun 2004–2007



Sumber: BPS, Suara Merdeka, 22 Desember 2007

Bentuk diagram seperti gambar 1.3 dinamakan diagram batang, di mana sumbu X menyatakan bulan dan sumbu Y menyatakan inflasi (dalam %).

Sehingga dapat dikatakan bahwa:

Diagram batang adalah diagram penyajian data dalam bentuk batang atau kotak.

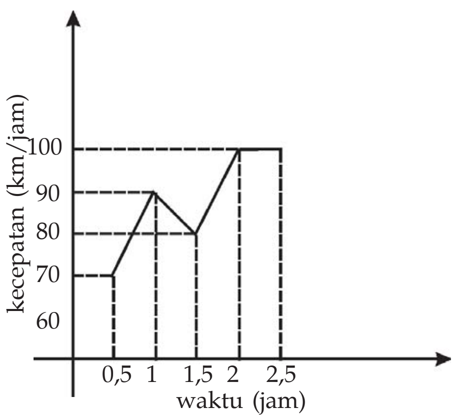
Diagram batang dilengkapi dengan skala, sehingga nilai data dapat dibaca.

b. Diagram Garis

Anda sudah mengetahui cara menggambar diagram kartesius dengan sumbu X dan sumbu Y? Coba Anda ingat kembali cara menentukan letak suatu titik pada suatu bidang dengan menggunakan sistem koordinat kartesius. Penempatan titik pada bidang berguna untuk membuat diagram garis. Seperti apakah bentuk diagram garis itu?

Perhatikan contoh di bawah ini!

Sebuah mobil melaju kencang di jalan tol yang lurus. Karena banyak kendaraan yang melaju, pengemudi sering mengurangi dan menambah kecepatan. Perubahan kecepatan ditampilkan dalam diagram berikut.



Gambar 1.4

Diagram seperti ini disebut diagram garis, sehingga dapat dikatakan bahwa:

Diagram garis adalah diagram penyajian data dalam bentuk garis

Diagram garis biasanya digunakan untuk menggambarkan keadaan yang berkesinambungan.

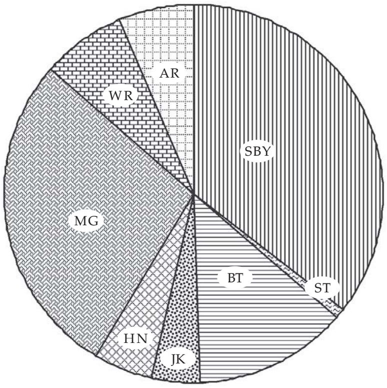
c. Diagram Lingkaran

Selain disajikan dalam bentuk batang dan garis, suatu data statistik dapat disajikan dalam bentuk lingkaran.

Seperti apakah bentuk diagram lingkaran itu?

Perhatikan contoh berikut ini!

Dalam suatu jajak pendapat mengenai calon presiden periode 2009–2014 data perolehan suara disajikan dalam diagram berikut.



Sumber: infojatim.blogspot.com/2007

Gambar 1.5

Perolehan suara jajak pendapat adalah:

SBY = 35,5%

MG = 28%

WR = 7%

AR = 6,5%

HN = 5%

JK = 4%

ST = 1%

BT = 13 %

Bagaimana hubungan prosentase (%) dengan derajat (°)? Sebagai contoh, perolehan suara SBY adalah 35,5% maka dalam diagram digambarkan sebesar:

$$\frac{35,5}{100} \times 360^\circ = 127,8^\circ$$

Dengan cara yang sama, coba Anda tentukan derajat dari masing–masing prosentase pada diagram. Siapakah calon presiden 2009 yang perolehan suaranya paling tinggi?

Penyajian data dalam bentuk seperti diagram di atas disebut diagram lingkaran. Dengan kata lain

Diagram lingkaran adalah diagram penyajian data dalam bentuk lingkaran.

3. Penyajian Data Dalam Bentuk *Ogive*

Sebelum kita membahas penyajian data dalam bentuk *ogive*, marilah kita mengingat kembali pembahasan mengenai tabel distribusi frekuensi. Data yang banyak dengan ukuran berbeda–beda dikelompokkan dalam kelas–kelas interval. Lalu apakah hubungannya dengan *ogive*?

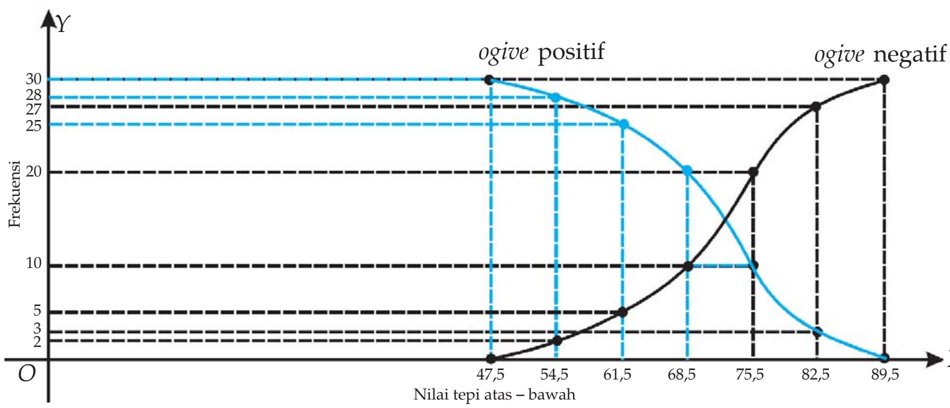
Tabel yang digunakan dalam bentuk *ogive* adalah tabel distribusi frekuensi kumulatif, yaitu tabel frekuensi yang menyatakan data lebih dari dan kurang dari. Untuk memahaminya, simaklah contoh berikut ini!

Dari data skor angket kegiatan berkemah siswa kelas XI program IPS pada tabel 1.8, diperoleh tabel distribusi frekuensi kumulatif, yaitu:

Tabel 1.8 Skor angket kegiatan berkemah

Tepi Kelas	Frekuensi	
	Kurang dari	Lebih dari
47,5	0	30
54,5	2	28
61,5	5	25
68,5	10	20
75,5	20	10
82,5	27	3
89,5	30	0

Dari tabel di atas, dapat dibuat sebuah diagram berikut ini.



Gambar 1.6

Dari keterangan dan gambar 1.6, dapat disimpulkan bahwa:

Ogive adalah diagram yang menyajikan data dari tabel distribusi frekuensi kumulatif.

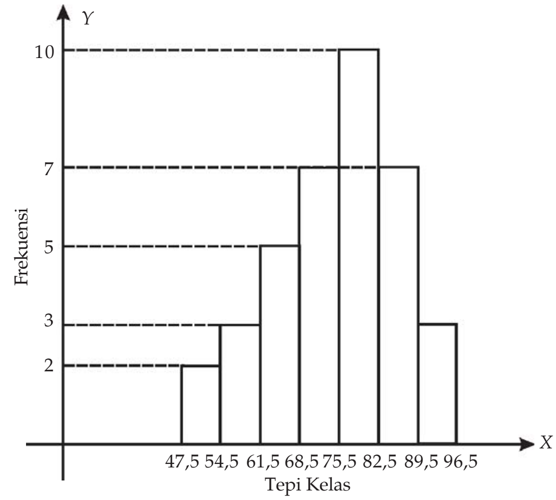
Ogive yang diperoleh dari data distribusi frekuensi kumulatif kurang dari disebut *ogive* negatif, dan *ogive* yang diperoleh dari data tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari disebut *ogive* positif.

4. Penyajian Data dalam Bentuk Histogram dan Poligon

a. Histogram

Anda telah mempelajari tentang penyajian tabel distribusi frekuensi dalam bentuk *ogive*. Bagaimana bentuknya jika tabel tersebut Anda sajikan dalam gambar yang berbentuk batang tegak dan berhimpitan? Marilah kita pelajari dengan menyimak contoh berikut ini.

Dari data skor angket kegiatan berkemah, dapat disajikan dalam bentuk diagram berikut ini.



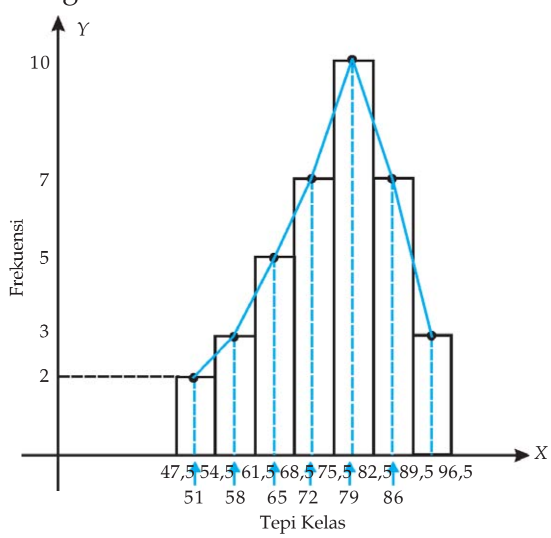
Gambar 1.7

Diagram di atas disebut histogram. Dari bentuk diagram tersebut dapat didefinisikan:

Histogram adalah diagram yang menyajikan data dari tabel distribusi frekuensi dengan bentuk batang dan berimpitan.

Sumbu mendatar (sumbu x) menyatakan tepi kelas, dan sumbu tegak (sumbu y) menyatakan frekuensi.

b. Poligon Frekuensi



Gambar 1.8

Perhatikan kembali tabel distribusi frekuensi (tabel 1.7) dan histogram dari tabel tersebut. Apabila titik–titik tengah pada masing–masing kelas juga dicantumkan dalam histogram, diagram apa yang akan Anda peroleh? Untuk mengetahuinya, coba perhatikan diagram di samping ini terlebih dahulu.

Titik tengah dari bagian atas diagram batang pada histogram saling dihubungkan, sehingga diperoleh sebuah diagram garis. Diagram garis semacam ini disebut poligon frekuensi.

Poligon frekuensi adalah diagram garis yang menghubungkan setiap titik tengah batang bagian atas dari suatu histogram.

Tugas Kelompok

Kerjakan di buku tugas Anda!

Buatlah kelompok yang terdiri 4 orang. Kumpulkan informasi tentang nilai semua mata pelajaran yang tertera pada raport kelas X masing–masing anggota kelompok Anda. Dari data yang Anda kumpulkan, cantumkan dalam sebuah tabel, kemudian sajikan dalam bentuk diagram batang, diagram garis, diagram lingkaran, *ogive*, histogram, dan poligon frekuensi dengan cara manual dan menggunakan program Microsoft Excel. Tuliskan hasilnya dalam bentuk laporan.

Latihan 2

Kerjakan di buku tugas Anda!

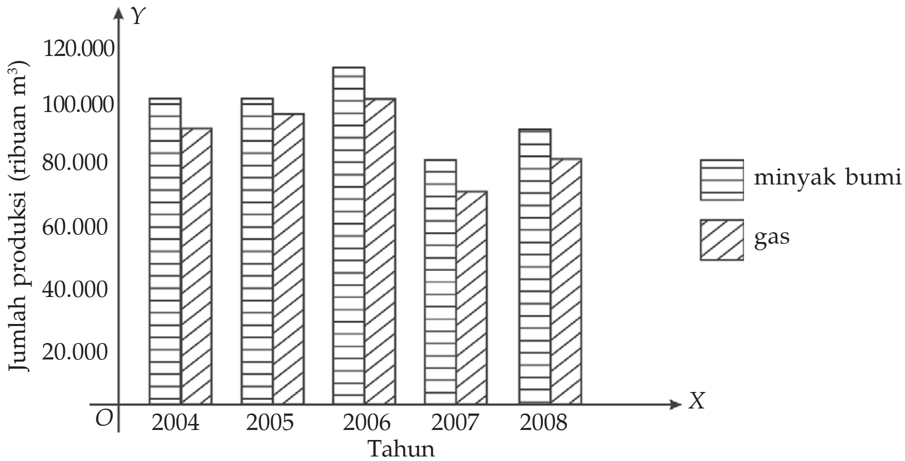
1. Berikut ini adalah kumpulan data yang diperoleh dari penjualan sepeda motor dari dealer motor "Speed Matix" tiap bulan selama 40 bulan terakhir.

59	54	49	46	50	38	39	41
58	76	56	64	48	46	54	46
53	37	70	59	62	57	58	50
45	45	52	74	52	60	40	47
55	47	48	56	51	51	48	38

   a. Tentukan jangkauan, banyak kelas, panjang kelas, tepi kelas, interval kelas, dan titik tengah kelas dari data tersebut!

   b. Buatlah tabel distribusi frekuensi dari data tersebut!

2. Diagram berikut memperlihatkan produksi gas dan minyak bumi dalam ribuan m^3 pada tahun 2004 sampai tahun 2008.



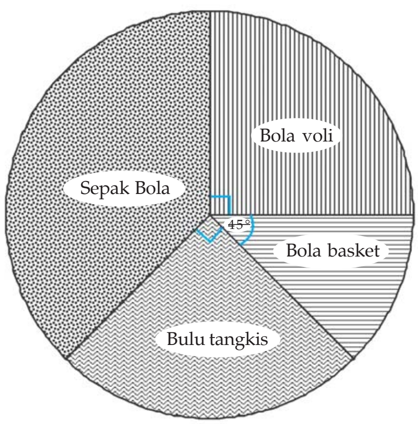
Berdasarkan diagram di atas, tentukan:

a. Berapa m^3 produksi gas paling banyak? Tahun berapa?

b. Kapan produksi gas dan minyak bumi mengalami penurunan? Kira-kira berapa persen penurunannya?

c. Kapan minyak bumi mengalami kenaikan? Kira-kira berapa m^3 kenaikannya?

3. Perhatikan diagram di bawah ini!



Siswa-siswa yang gemar permainan sepak bola, bola basket, bola voli, dan bulutangkis ditunjukkan pada diagram di atas. Jika jumlah siswa seluruhnya 520 orang, tentukan jumlah dan prosentase siswa yang gemar:

a. sepak bola;

b. bulutangkis dan bola voli;

c. bola basket!

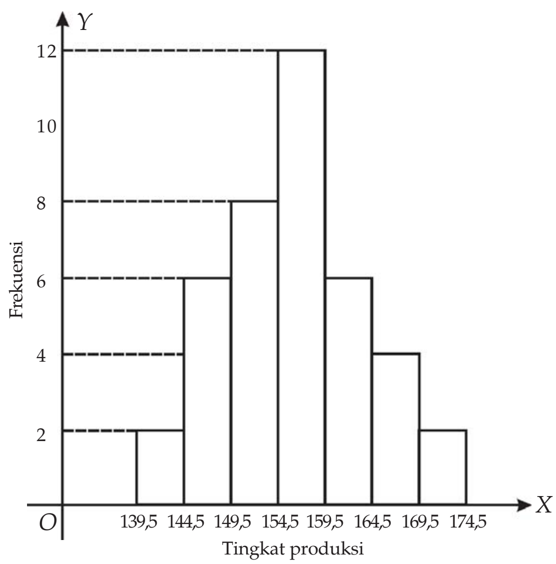
4. Hasil pengukuran berat badan siswa SMA kelas XI program IPS, dicantumkan dalam tabel berikut ini.

Berat badan	Frekuensi
35–39	2
40–44	4
45–49	6
50–54	10
55–59	11
60–64	4
65–79	3
70–74	2

a. Sajikan tabel di atas dalam bentuk *ogive* positif dan *ogive* negatif!

b. Berapa banyak siswa yang mempunyai berat badan lebih dari 50 kg?

5. Perhatikan gambar di bawah ini!



Histogram di atas menunjukkan tingkat produksi tas anyaman tiap bulan sekali.

a. Gambarkan poligon frekuensi dari histo–gram tersebut!

b. Cantumkan data–data dari histogram tersebut ke dalam tabel distribusi fre–kuensi!

C. Ukuran Pemusatan Data

Selain menyajikan data dalam berbagai bentuk, untuk memberikan gambaran atau kesimpulan mengenai nilai–nilai dalam suatu kumpulan data, diperlukan suatu nilai yang dipandang dapat mewakili kumpulan data itu. Bagaimanakah cara memperoleh nilai itu?

Misalnya, nilai ujian nasional tiga siswa disajikan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 1.9 Nilai Ujian Nasional

Nama	Matematika	Bahasa Indonesia	Ekonomi	Bahasa Inggris
Dinda	8	10	8	10
Yuda	9	9	9	8
Manda	10	9	8	9

Untuk mengetahui siswa yang nilai rata–ratanya paling tinggi, nilai yang sering muncul dan nilai yang terletak di tengah–tengah maka digunakan suatu ukuran yang mewakili disebut ukuran *p* pemusatan data. Dari pernyataan dan contoh di atas dapat disimpulkan:

Ukuran pemusatan data adalah nilai statistik yang dipandang dapat mewakili kumpulan suatu data, yaitu mean, median, dan modus.

1. Mean

a. Mean Data Tunggal

Sebelum membahas mean lebih lanjut, coba Anda lihat kembali tabel 1.9. Dari tabel tersebut dapat diperoleh nilai statistik, yaitu:

$$\text{Nilai mean Dinda} = \frac{8+10+8+10}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

$$\text{Nilai mean Yuda} = \frac{9+9+9+8}{4} = \frac{35}{4} = 8{,}75$$

$$\text{Nilai mean Manda} = \frac{10+9+8+9}{5} = \frac{36}{4} = 9$$

Nilai mean Dinda dibandingkan dengan nilai mean Yuda yaitu 9 : 8,75. Hal ini menunjukkan bahwa Dinda lebih berhasil dalam ujian nasional itu.

Secara umum dapat dirumuskan bahwa mean dari n data, yaitu $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ adalah hasil jumlah nilai data dibagi banyak data. Sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Keterangan:

$\bar{x}$ = mean (rata–rata hitung)

x_i = nilai data ke–i

n = banyak data yang diamati

Contoh 1.2

Dari tes TOEFL yang diikuti sebanyak lima kali, Reva memperoleh skor 455, 517, 472, 498, dan 517. Tentukan skor rata–rata tes TOEFL Reva tersebut.

Jawab:

Mean: $\bar{x} = \frac{455 + 517 + 472 + 498 + 517}{5} = \frac{2459}{5} = 491{,}8$

Jadi, skor mean/rata–rata tes TOEFL Reva adalah 491,8.

Apabila data–data skor tes TOEFL pada contoh di atas disajikan dalam tabel frekuensi, yaitu:

Tabel 1.10 Data skor tes TOEFL

Nilai (x_i)	Frekuensi (f_i)	$f_i\ x_i$
455	1	455
472	1	472
498	1	498
517	2	1034
Jumlah	5	2459

Maka mean (rata–rata) dari data skor tes TOEFL pada tabel di 1.10 dapat dihitung dengan persamaan:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$= \frac{2459}{5} = 491{,}8$$

Jadi, skor mean/rata–ratanya sama dengan hasil perhitungan sebelumnya, yaitu 491,8.

b. Mean Data Berkelompok

1) Metode Biasa

Apabila telah dibentuk tabel distribusi frekuensi biasa, dengan frekuensi (f_i) interval kelas ke–i, dan titik tengah interval kelas ke–i (x_i) seperti pada contoh tabel berikut.

Tabel 1.11 Data berat badan 100 orang

Berat badan (*kg*)	Titik tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$f_i\ x_i$
60–62	61	10	610
63–65	64	25	1600
66–68	67	32	2144
69–71	70	15	1050
72–74	73	18	1314
Jumlah		100	6718

Maka, nilai mean (rata–rata hitung) dari data tersebut adalah:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{6718}{100} = 67{,}18$$

Dengan demikian, nilai mean (rata–rata hitung) dari data berkelompok ditentukan dengan menggunakan persamaan:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Keterangan

$\bar{x}$ = mean (rata–rata hitung)

$\bar{x}_i$ = nilai data ke–i

f_i = frekuensi ke–i

2) Metode Simpangan Rata–Rata

Mean (rata–rata hitung) juga dapat dihitung dengan rata–rata sementara (x_s), yaitu berupa bilangan yang dipilih untuk menggeser bilangan yang dicari rata–ratanya menjadi bilangan yang lebih kecil (d).

Seperti apakah rata-rata sementara itu? Untuk mengetahui jawabannya, coba Anda perhatikan contoh berikut ini.

Bila nilai mean (rata–rata hitung) dari data pada tabel 1.11 dihitung dengan menggunakan rata–rata sementara, maka dicari terlebih dahulu nilai rata–rata sementaranya.

Rata–rata sementara ($\bar{x}_s$) Anda cari dengan memperkirakan letak titik tengah kelas dari data yang paling besar frekuensinya (paling banyak muncul), maka diambil $\bar{x}_s = 67$.

Tabel 1.12

Berat Badan (kg)	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$d_i = x_i - \bar{x}_s$	$f_i\, d_i$
60–62	61	10	–6	–60
63–65	64	25	3	75
66–68	67	32	0	0
69–71	70	15	3	45
72–74	71	18	6	108
Jumlah	–	100	0	18

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i\, d_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i}$$

$$= 67 + \frac{18}{100}$$

$$= 67 + 0{,}18 = 67{,}18$$

Jadi, nilai mean dari data pada tabel 1.12 adalah 67,18.
Maka mean data dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\, d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Keterangan:

$\bar{x}$ = mean (rata–rata hitung)

$\bar{x}_s$ = rata–rata sementara

d_i = $x_i - \bar{x}_s$ = simpangan atau deviasi dari rata–rata sementara.

3) Metode Pengkodean (*coding*)

Metode pengkodean (*coding*) sering digunakan apabila dijumpai nilai–nilai dalam data yang berupa bilangan–bilangan besar. Perhatikan tabel 1.12, nilai pada kolom ($x_i - \bar{x}_s$) merupakan kelipatan panjang kelas. Anda bisa menyederhanakan perhitungannya dengan menambah kolom baru, yaitu kolom $\frac{x_i - \bar{x}_s}{p}$, dengan p = panjang kelas 62,5 – 59,5 = 3.

Misalkan $\frac{x_i - \bar{x}_s}{p} = u$, maka tabel 1.12 menjadi:

Tabel 1.13

Berat Badan (*kg*)	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$d_i = x_i - \bar{x}_s$	u_i	$f_i\, u_i$
60–62	61	10	–6	–2	–20
63–65	64	25	3	–1	–25
66–68	67	32	0	0	0
69–71	70	15	3	1	15
72–74	71	18	6	2	36
Jumlah	–	100	0	0	6

Analog dengan metode rata–rata sementara diperoleh:

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \left(\frac{\sum_{i=1}^{5} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} \right) p$$

$$= 67 + \left(\frac{6}{100} \right) . \ 3$$

$$= 67 + 0{,}18 = 67{,}18$$

Jadi, mean (rata–rata hitung) dari tabel 1.13 dengan metode pengkodean adalah 67,8.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa, untuk mencari nilai mean (rata–rata hitung) digunakan persamaan:

$$\boxed{\bar{x} = \bar{x}_s + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \right) p}$$

Keterangan:

$\overline{x}$ = mean (rata–rata hitung)

$\overline{x}_s$ = rata–rata sementara

p = panjang kelas

f_i = frekuensi ke–i

$$u_i = \frac{\overline{x} - \overline{x}_s}{p}$$

Metode *coding* merupakan penjabaran dari metode simpangan rata–rata.

2. Modus

a. Modus Data Tunggal

Dalam kehidupan sehari–hari, Anda sering dihadapkan pada permasalahan yang membutuhkan hasil data yang paling banyak muncul dari suatu kelompok data.

Misalnya, desa Sukamakmur mengadakan pemilihan kepala desa. Penduduk yang berjumlah 500 orang ini harus memilih salah satu calon kepala desa dengan mencoblos salah satu gambar partai. Setelah pemilihan selesai, diperoleh data sebagai berikut.

Tabel 1.14 Hasil Pemilihan Kepala Desa

Gambar	Jumlah Suara
Padi	220
Kelapa	130
Jagung	95
Ketela	55

Untuk menentukan siapa calon kepala desa yang menang, calon yang perolehan suaranya paling banyak adalah pemenangnya. Dalam hal ini, calon kepala desa dengan partai padi memenangkan pemilihan kepala desa karena mendapatkan perolehan suara tertinggi 220 suara.

Dengan kata lain, penduduk desa Sukamakmur telah menentukan modus dari suatu kumpulan data. Sehingga dapat didefinisikan modus dari n data dengan $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah:

Modus adalah nilai yang paling sering muncul atau memiliki frekuensi tertinggi.

Contoh 1.3

Tentukan modus dari data berikut ini!

Tabel 1.15

x	1	2	3	4	5	6	7
f	2	5	3	10	15	8	15

Jawab:

Data 5 dan 7 memiliki frekuensi tertinggi, yaitu 15. Jadi, modusnya adalah 5 dan 7.

b. Modus Data Berkelompok

Seorang panitia pemilihan kepala desa ditugaskan untuk mencatat penduduk yang mengikuti pemilihan kepala desa berdasarkan golongan umurnya. Data yang diperoleh disajikan dalam tabel distribusi frekuensi berikut.

Tabel 1.16 Data umur penduduk

Umur (x)	Frekuensi (x)	
17–25	70	
26–34	90	d_1
35–43	140	
44–52	95	d_2
53–61	70	
62–70	30	

Untuk menentukan modus dari tabel 1.16, ikutilah langkah–langkah berikut ini.

1) Sebelumnya, Anda perkirakan dulu, letak modus dalam kelas umur. Modus berada di kelas 35–43.

   Kelas modus = 35–43.

2) Tepi bawah kelas b = 34,5

3) Selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya dinyatakan dengan d_i.

   $d_1 = 140 - 95 = 45$

4) Selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya dinyatakan dengan d_2.

   $d_2 = 140 - 95 = 45$

5) Panjang kelas $p = 25{,}5 - 16{,}5 = 9$.

Diperoleh nilai modus (Mo) untuk tabel 1.16 yaitu:

$$Mo = b + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)p$$

$$= 34{,}5 + \left(\frac{45}{45 + 45}\right).9$$

$$= 34{,}5 + 4{,}5$$

$$= 39$$

Jadi, modus yang menyatakan umur penduduk dalam pemilihan adalah 39.

Dengan demikian, modus data berkelompok dapat Anda peroleh menggunakan persamaan:

$$\boxed{Mo = b + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)p}$$

Keterangan:
Mo = modus
b = tepi bawah kelas atas
d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya
d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya
p = panjang kelas

3. Median

a. Median Data Tunggal

Sebelum Anda mempelajari median dalam statistika, perhatikan median dalam kehidupan sehari–hari. Misalnya, median jalan. Median jalan dinyatakan sebagai bagian jalan yang berada di tengah–tengah, begitu pula dengan median dalam statistika.

Bagaimanakah cara menentukan median suatu kumpulan data? Untuk memahaminya, coba Anda perhatikan contoh berikut ini.

Misalnya, kumpulan data tentang perolehan medali emas dari 16 cabang olah raga adalah:

3, 5, 6, 5, 4, 4, 6, 7, 7, 4, 5, 7, 8, 7, 5, 5

Median (nilai tengah) dari kumpulan data di atas dapat ditentukan dengan langkah–langkah berikut.

1) Kumpulan data diurutkan dari yang terkecil sampai dengan yang terbesar.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 3, & 4, & 4, & 4, & 5, & 5, & 5, & 5, & 5, & 6, & 6, & 7, & 7, & 7, & 7, & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{array}$$

2) Tentukan median (nilai tengah) data tersebut.

Karena jumlah data $n = 16$ (genap), nilai tengah berada di antara x_8 dan x_9.

$$Me = \frac{1}{2}(x_8 + x_9) = \frac{1}{2}(5 + 5) = \frac{10}{2} = 5$$

3) Apabila kumpulan data tersebut Anda hilangkan satu data, misalnya angka 8 sehingga jumlah data menjadi 15, $n = 15$ (ganjil), maka nilai tengahnya adalah x_8. Jadi $Me = 5$.

Dengan demikian, definisi median dalam statistika yaitu,

> Median adalah nilai tengah kumpulan data yang telah diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar.

Apabila kumpulan n data disajikan dalam bentuk tunggal yaitu $x_1, x_2, ..., x_n$ maka median dari data tersebut dapat ditentukan sebagai berikut.

1) Untuk ukuran data n ganjil, maka mediannya adalah nilai data yang ditengah atau nilai data ke–$\frac{n+1}{2}$.

$$\boxed{Me = x_{\frac{n+1}{2}}}$$

Keterangan Me = median

$x_{\frac{n+1}{2}}$ = data ke–$\frac{n+1}{2}$.

2) Untuk ukuran data n genap, mediannya adalah rata–rata dari dua nilai data yang ditengah atau rata–rata dari nilai data ke–$\frac{n}{2}$ dan nilai data ke–$\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$$\boxed{Me = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)}$$

Keterangan:

$x_{\frac{n}{2}}$ = data ke–$\frac{n}{2}$

$x_{\frac{n}{2}+1}$ = data ke–$\left(\frac{n}{2}+1\right)$

b. Median Data Berkelompok

Bagaimanakah cara Anda menentukan median data dari tabel distribusi frekuensi? Untuk mengetahuinya, simaklah contoh tabel berikut ini.

Misalkan, seorang karyawan sebuah toko bangunan sedang mengukur diameter dari 40 buah pipa. Hasil pengukurannya itu dituliskan dalam tabel.

Tabel 1.17 Diameter dari 40 buah pipa

Diameter (*mm*)	Frekuensi	Frekuensi kumulatif
65–67	2	2
68–70	6	7
71–73	13	20
74–76	14	34
77–79	4	38
80–82	2	40
Jumlah	40	–

Untuk menentukan median dari tabel 1.17, ikutilah langkah–langkah berikut.

1) Tentukan letak median terlebih dahulu dengan persamaan:

$$\text{Letak } Me = \frac{1}{2}\, n$$

Dengan n = banyak data

Untuk $n = 40$ maka,

$$\text{Letak } Me = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20$$

Jadi, median terletak pada data ke–20 yaitu dalam kelas 71–73.

2) Tepi bawah kelas media

$b = 71 - 0{,}05 = 70{,}5$

3) Frekuensi kumulatif sebelum kelas median

$F_s = 7$

4) Frekuensi kelas median

$f_s = 13$

5) Panjang kelas

$p = 67{,}5 - 64{,}5 = 3$

Maka diperoleh nilai median (*Me*) untuk tabel 1.17 yaitu:

$$Me = b + \left(\frac{\frac{1}{2}n - F_s}{f_s} \right) p$$

$$= 70{,}5 + \left(\frac{\frac{1}{2}40 - 7}{13} \right) 3$$

$$= 70{,}5 + 3$$

$$= 73{,}5$$

Jadi, median yang menyatakan nilai tengah dari diameter 40 pipa adalah 73,5 mm.

Dengan demikian, median data berkelompok dapat Anda peroleh menggunakan persamaan:

$$\boxed{Me = b + \left(\frac{\frac{1}{2}n - F_s}{f_s} \right) p}$$

Keterangan:

Me = median
b = tepi bawah kelas median
n = banyak data
F_s = frekuensi kumulatif sebelum kelas median
f_s = frekuensi kelas median
p = panjang kelas

Tugas Kelompok

Kerjakan bersama kelompok Anda!

Buatlah kelompok yang terdiri dari 5 orang.

Carilah 10 data yang termasuk statistik dalam bentuk tabel maupun diagram dari majalah, koran, atau internet. Susunlah data–data yang Anda peroleh dalam sebuah kliping yang rapi dengan mencantumkan sumbernya. Hitunglah nilai mean, modus, dan median dari masing–masing data tersebut. Laporkan hasil kesimpulannya dengan bahasa yang lugas.

Latihan 3

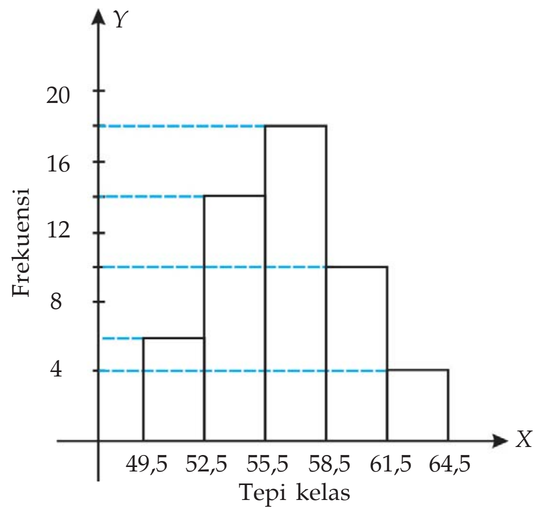
Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Perhatikan nilai ujian matematika yang dinyatakan pada tabel berikut!

Nilai	55	58	60	63	67	72	85	90
Frekuensi	2	4	9	11	7	4	2	1

Seorang siswa dinyatakan lulus ujian jika nilai ujiannya lebih tinggi dari rata–rata nilai ujian tersebut. Tentukan banyaknya siswa yang lulus!

2. Histogram berikut ini menunjukkan banyaknya pembeli di toko buku "Ceria" setiap hari.



a. Buatlah tabel distribusi frekuensi dari histogram di samping!

b. Tentukan modus dari data yang dinyatakan dalam histogram tersebut!

3. Sebuah keluarga mempunyai 5 orang anak. Anak yang bungsu berumur x tahun dan yang sulung berumur $3x$ tahun. Tiga anak yang lain masing–masing berumur $(x + 3)$ tahun, $(x + 5)$ tahun, dan $(3x – 2)$ tahun. Rata–rata umur kelima anak itu adalah 12 tahun.

a. Berapa umur anak bungsu dan anak sulung?

b. Tentukan median dari data anak keluarga itu!

4. Tabel berikut ini adalah distribusi frekuensi dari harga saham 100 perusahaan di BEJ pada akhir tahun 2007.

Harga Saham (ratusan Rp)	Banyaknya perusahaan
60–62	5
63–65	18
66–68	42
69–71	27
72–74	8

   a. Hitunglah rata–rata harga saham dengan metode *coding*!
   b. Tentukan modus dari harga saham!
   c. Tentukan median dari harga saham!

5. Perhatikan tabel berikut ini.

Nilai	Frekuensi
60–62	5
41–50	2
51–60	k
61–70	10
71–80	8

   Dari data yang dinyatakan dalam tabel distribusi frekuensi di atas, diketahui kelas modus adalah 61–70 dan nilai modusnya 66,5. Tentukan nilai k!

D. Ukuran Letak Data

Suatu data tidak hanya dapat Anda bagi menjadi dua bagian yang sama (dengan median), tetapi dapat Anda bagi menjadi empat, sepuluh , dan bahkan seratus bagian yang sama. Bagaimanakah cara menentukannya? Marilah kita bahas bersama dalam subbab ini.

1. Kuartil

a. Kuartil Data Tunggal

Sebelum membahas kuartil data, coba Anda ingat kembali pembahasan sebelumnya mengenai median dari kumpulan data. Median membagi data terurut menjadi dua bagian yang sama. Bagaimana jika data yang telah terurut dibagi menjadi empat bagian

yang sama? Jika demikian, Anda akan memperoleh empat bagian yang sama dengan nilai pembatas, yaitu kuartil pertama (Q_1), kuartil kedua (Q_2), dan kuartil ketiga (Q_3). Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh di bawah ini!

Contoh 1.4

Data siswa yang memperoleh nilai 10 untuk ulangan matematika selama 16 kali, yaitu 9, 5, 8, 5, 7, 8, 6, 7, 5, 8, 6, 6, 6, 6, 7, 9.

1) Untuk menentukan nilai–nilai kuartil dari kumpulan data, langkah pertama yang harus Anda lakukan adalah mengurutkan data tersebut.
2) Kemudian, kuartil kedua (Q_2) ditentukan dengan membagi data menjadi dua bagian yang sama.
3) Kuartil pertama (Q_1) ditentukan dengan membagi data di bawah Q_2 menjadi dua bagian yang sama.
4) Kuartil ketiga (Q_3) ditentukan dengan membagi data di atas Q_2 menjadi dua bagian yang sama.

Data diurutkan menjadi: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{16}$, yaitu:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 5, & 5, & 5, & 6, & 6, & 6, & 6, & 6, & 7, & 7, & 7, & 8, & 8, & 8, & 9, & 9. \\ & & & & \downarrow & & & \downarrow & & & & & \downarrow & & & \\ & & & & Q_1 & & & Q_2 & & & & & Q_3 & & & \end{array}$$

diperoleh

$$Q_1 = \frac{6+6}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$Q_2 = \frac{6+7}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

$$Q_3 = \frac{8+8}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Dapat disimpulkan bahwa:

> Kuartil adalah nilai pembatas yang membagi data terurut menjadi empat bagian yang sama.
>
> Kuartil terdiri dari tiga jenis yaitu kuartil pertama (Q_1), kuartil kedua (Q_2), dan kuartil ketiga (Q_3).

Cara lain untuk menentukan letak kuartil yaitu menggunakan persamaan:

$$\boxed{\text{Letak } Q_i = \text{Data ke–}\left[\frac{1}{4}(n+1)\right]}$$

Keterangan:
Q_i = kuartil ke–i
n = banyak data
i = 1, 2, 3

diperoleh:

1) Letak Q_1 = data ke–$\left[\frac{1}{4}(16+1)\right]$
= data ke–(4,25)
Maka Q_1 = x_4 + 0,25 (x_5 − x_4)
= 6 + 0,25 (6 – 6)
= 6 + 0,25 (0)
= 6

2) Letak Q_2 = data ke–$\left[\frac{2}{4}(16+1)\right]$
= data ke–(8,5)
Maka Q_2 = x_8 + 0,5 (x_9 − x_8)
= 6 + 0,5 (7 – 6)
= 6 + 0,5 (1)
= 6,5

3) Letak Q_3 = data ke–$\left[\frac{3}{4}(16+1)\right]$
= data ke–(12,75)
Maka Q_3 = x_{12} + 0,75 (x_{13} − x_{12})
= 8 + 0,75 (8 – 8)
= 8 + 0
= 8

b. Kuartil Data Berkelompok

Untuk data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi, nilai kuartilnya juga dapat diketahui. Bagaimanakah cara menentukannya?

Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 1.5

Data penjualan voucher pulsa gesek untuk handphone dari "Era cell" per minggu disajikan dalam tabel 1.18.

Tabel 1.18 Data penjualan voucher

Nilai	Frekuensi	Frekuensi kumulatif
35–45	6	6
46–56	8	14
57–67	10	24
68–78	9	33
79–89	7	40
Jumlah	40	

Untuk menentukan nilai kuartil kedua (Q_2) dari tabel 1.18, ikutilah langkah–langkah berikut.

1) Tentukan letak kuartil kedua, dengan persamaan:

$$\text{Letak } Q_2 = \text{data ke–}\left[\frac{2}{4}(40+1)\right], \text{ dengan } n = 40$$

$$= \text{data ke–}(20{,}5)$$

maka Q_2 berada di kelas 57–67

2) Tepi bawah kelas kuartil, b = 56,5
3) Frekuensi kumulatif sebelum kelas kuartil, F_k = 14
4) Frekuensi kelas kuartil f_k = 10
5) Panjang kelas, p = 45,5–34,5 = 10

Maka diperoleh nilai kuartil kedua (Q_2), yaitu:

$$Q_2 = b + \left(\frac{\frac{2}{4}n - F_k}{f_k}\right)p$$

$$= 56{,}5 + \left(\frac{\frac{2}{4}40 - 14}{10}\right). 10$$

$$= 56{,}5 + \left(\frac{50}{10}\right)$$

$$= 56{,}5 + 6$$

$$= 62{,}5$$

Jadi, nilai Q_2 adalah 62,5.

Dengan cara yang sama, coba Anda tentukan nilai Q_1 dan Q_3 dari data pada tabel 1.18!

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa nilai kuartil data dalam tabel distribusi frekuensi dapat ditentukan dengan persamaan:

$$Q_i = b + \left(\frac{\frac{i}{4}n - F_k}{f_k} \right) p$$

Keterangan:

Q_i = kuartil ke–i
i = 1, 2, 3, 4
b = tepi bawah kelas kuartil
n = banyak data
f_k = frekuensi kelas kuartil
F_k = frekuensi kumulatif sebelum kelas kuartil
p = panjang data

c. Statistik Lima Serangkai

Nilai–nilai statistik dari data yang berupa x_{min}, Q_1, Q_2, Q_3, dan x_{maks} dapat disajikan dengan menggunakan statistik lima serangkai. Perhatikan bagan berikut.

Q_2	
Q_1 x_{min}	Q_3 x_{maks}

Hasil data dari contoh 1.5 dapat disajikan dalam statistik lima serangkai, yaitu:

$Q_2 = 6{,}5$	
$Q_1 = 6$ $x_{min} = 5$	$Q_3 = 8$ $x_{maks} = 9$

2. Desil

a. Desil Data Tunggal

Jika kuartil membagi data terurut menjadi empat bagian yang sama dengan tiga buah nilai Q_1, Q_2, dan Q_3, maka desil membagi data terurut menjadi sepuluh bagian yang sama dengan sembilan nilai D_1, D_2,..., D_9. Desil dapat Anda tentukan apabila banyaknya data lebih dari atau sama dengan 10 ($n \geq 10$).

Untuk lebih jelasnya, simaklah contoh berikut ini.

Contoh 1.6

Data waktu hidup baterai merk "Terang" sebagai berikut.

24	25	18	20	22	22	19	21	16	28
24	19	20	21	23	26	27	24	22	22

Bagaimana caranya menentukan Desil dari data di atas?

1) Langkah pertama yang harus Anda lakukan adalah mengurutkan data dari yang terkecil hingga terbesar.
2) Tentukan letak desil menggunakan persamaan:

   Letak desil D_i = data ke–$\left[\dfrac{i}{10}(n+1)\right]$

   Keterangan:
   D_i = desil ke–i
   i = 1, 2, 3, ..., 9
   n = banyaknya data
3) Tentukan nilai desil yang dicari.
   Diperoleh 20 data dari x_1, x_2, x_3, ..., x_{20} yaitu:
   16, 18, 19, 19, 20, 20, 21, 21, 22, 22, 22, 22, 23, 24, 24, 24, 25, 26, 27, 28

   $$\Rightarrow \text{ Letak } D_1 = \frac{1}{10}(20 + 1) = 2{,}1$$

   $$\begin{aligned}\text{Maka } D_1 &= x_2 + (0{,}1)(x_3 - x_2)\\ &= 18 + (0{,}1)(19 - 18)\\ &= 18 + 0{,}1\\ &= 18{,}1\end{aligned}$$

   $$\Rightarrow \text{ Letak } D_2 = \frac{2}{10}(20 + 1) = 4{,}2$$

   $$\begin{aligned}\text{Maka } D_2 &= x_4 + (0{,}2)(x_5 - x_4)\\ &= 19 + (0{,}2)(20 - 19)\\ &= 19 + 0{,}2\\ &= 19{,}2\end{aligned}$$

   Coba Anda tentukan nilai D_3 sampai D_9 dari data di atas! Mudah sekali bukan?

   Dari uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa:

   Desil adalah nilai pembatas yang membagi data terurut menjadi sepuluh bagian yang sama. Desil terdiri dari sembilan jenis, yaitu desil pertama (D_1), desil kedua (D_2), dan seterusnya sampai desil sembilan (D_9).

b. Desil Data Berkelompok

Apabila data dari contoh 1.6 Anda sajikan dalam tabel distribusi frekuensi, bagaimana caranya menentukan nilai desilnya? Untuk mengetahuinya, simaklah contoh berikut!

Data waktu hidup 20 baterai merek "Terang" disajikan dalam tabel 1.19, di bawah ini.

Tabel 1.19 Data waktu hidup baterai

Waktu hidup	Frekuensi	Frekuensi kumulatif
16–18	2	2
19–21	8	10
22–24	6	16
25–27	3	19
28–30	1	20
Jumlah	20	

Untuk menentukan nilai desil kedua (D_2) dari data pada tabel 1.19, maka lakukan langkah–langkah berikut.

1) Tentukan letak desil dengan persamaan:

$$\text{Letak desil } D_2 = \text{data ke–}\left[\frac{2}{10}(20+1)\right]$$

$$= \text{data ke–}(4{,}2)$$

maka D_2 berada di kelas 19 – 21.

2) Tentukan tepi bawah kelas desil, b = 18,5
3) Tentukan frekuensi kumulatif sebelum kelas desil, F_d = 2
4) Tentukan frekuensi kelas desil, f_d = 8
5) Tentukan panjang kelas, p = 18,5 – 15,5 = 3

Maka diperoleh nilai desil kedua (D_2), yaitu :

$$D_2 = b + \left(\frac{\frac{2}{10}n - F_d}{f_d}\right)p$$

$$= 18{,}5 + \left(\frac{\frac{2}{10}.20 - 2}{8}\right)3$$

$$= 18{,}5 + 0{,}75$$

$$= 19{,}25$$

Jadi, nilai desil kedua (D_2) adalah 19,25.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa nilai desil dari data pada tabel distribusi frekuensi dapat ditentukan dengan persamaan:

$$D_i = b + \left(\frac{\frac{i}{10}n - F_d}{f_d} \right) p$$

Keterangan:

D_i = desil ke–i
i = 1, 2, 3, ..., 9
b = tepi bawah kelas desil
n = banyak data
p = panjang data
F_d = frekuensi kumulatif sebelum kelas desil
f_d = frekuensi kelas desil

Tugas Individu

Kerjakan di buku tugas Anda!

Bukalah kembali raport kelas X Anda. Kumpulkan semua nilai pelajaran yang ada, kemudian cantumkan dalam sebuah tabel. Hitunglah kuartil dan desil untuk data tersebut. Tuliskan hasil yang Anda peroleh dalam bentuk laporan untuk dikumpulkan kepada guru.

Latihan 4

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tentukan statistik lima serangkai dari data berikut.

   5,4; 5,1; 5,9; 4,2; 6,3; 4,6; 5,3;
   5,6; 5,3; 4,9; 6,1; 7,4; 6,7;

2. Lama pembicaraan melalui telepon oleh seorang pedagang elektronik dalam satuan menit tercatat sebagai berikut.

12	7	14	6	12	8
11	14	22	24	12	6
5	25	15	4	8	17
23	16	10	15	25	10
18	35	9	16	12	18

   Tentukan:

   a. kuartil pertama, median, dan kuartil ketiga;
   b. statistik lima serangkai;
   c. desil kelima dan kedelapan!

3. Data jarak antara rumah dengan balai desa dalam satuan meter di daerah pegunungan adalah:

   13, 15, 17, 13, 13, 19, 17, 17, 19, 19, 15, 15, 19, 15.

   Jika setiap ukuran itu dikurangi 3 kemudian hasilnya dibagi 2, maka tentukan hasilnya dalam statistik lima serangkai!

4. Tabel berikut menunjukkan umur kepala keluarga di suatu daerah.

Umur	Jumlah (ratusan)
25–29	2,22
30–34	4,05
35–39	5,08
40–44	10,45
45–49	9,47
50–54	6,63
55–59	4,16
60–64	1,66

   Tentukan:

   a. kuartil pertama dan ketiga;

   b. desil ketiga dan desil ketujuh!

5. Jika diketahui data peringkat berikut ini!

   5 5 8 10 22 x 27 28 31 33 35 35

   35 35 38 38 38 y 40 40 42 43 50 54

   Bila kuartil pertamanya 26 dan kuartil ketiganya 40, maka tentukan nilai x dan y!

E. Ukuran Penyebaran Data

Dengan menentukan pemusatan data dan ukuran letak data ternyata belum cukup untuk memberikan gambaran yang jelas dari suatu data. Mengapa demikian?

Untuk mengetahuinya, simaklah permasalahan berikut dengan cermat!

Dinas pertanian menyarankan penggunaan pupuk jenis baru dengan merk *A* dan *B* agar dapat meningkatkan hasil panen jagung. Setelah dilakukan uji coba pada 8 petak lahan yang sama, hasil panen jagung disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 1.20 Data hasil panen jagung dalam ton

Pupuk A	8	8	6	5	4	9	5	7
Pupuk B	6	6	7	7	8	7	6	5

Dari data tabel 1.20 rata–rata hasil panen dengan pupuk A dan pupuk B adalah sama, yaitu 6,5 ton. Namun, apabila data tersebut digunakan untuk mengukur kualitas pupuk setiap lahan. Apakah kualitas pupuk A akan sama dengan pupuk B? Belum tentu. Coba Anda perhatikan tabel 1.20, hasil panen pupuk B memiliki rentang yang lebih kecil dari pupuk A, yaitu 5 sampai 8. Jadi, dengan menggunakan pupuk B, hasil panen setiap petak lebih seimbang.

Dengan demikian, untuk memberikan gambaran suatu data yang lebih lengkap diperlukan suatu ukuran, yaitu ukuran penyebaran data.

Ukuran penyebaran data adalah ukuran yang menunjukkan seberapa jauh data suatu menyebar dari rata–ratanya.

Beberapa ukuran penyebaran sebagai berikut.

1. Jangkauan

Jangkauan sering disebut range atau rentang. Jangkauan dari suatu data didefinisikan sebagai selisih antara data terbesar dengan data terkecil.

Untuk memahaminya, perhatikan contoh di bawah ini!

Contoh 1.7

Data terurut dari banyaknya buku pelajaran yang dimiliki 9 siswa yaitu:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4, & 5, & 6, & 6, & 7, & 7, & 7, & 8, & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array}$$

Jangkauan data di atas adalah $R = x_9 - x_1 = 9 - 4 = 5$

Dapat disimpulkan bahwa untuk menentukan jangkauan suatu kumpulan data tunggal dapat menggunakan persamaan:

$$\boxed{R = x_{maks} - x_{min}}$$

Keterangan:

R = jangkauan/range/rentang

x_{maks} = data terbesar

x_{min} = data terkecil

Jangkauan data berkelompok merupakan selisih antara nilai tengah kelas terakhir dengan nilai tengah kelas pertama.

Perhatikan tabel berikut ini!

Tabel 1.21 Data umur peserta sertifikasi guru

Umur	Titik Tengah	Frekuensi
30–34	32	5
35–39	37	35
40–44	42	100
45–49	47	50
50–54	52	10

Tabel 1.21 menunjukkan data umur peserta yang mengikuti diklat sertifikasi guru yang berjumlah 200 orang.

Bila nilai tengah kelas pertama adalah 32 dan nilai tengah kelas terakhir adalah 52, maka

$$R = 52 - 32$$
$$= 20$$

Jadi, jangkauan data dari tabel 1.21 adalah 20.

Dapat disimpulkan bahwa untuk menentukan jangkauan data berkelompok digunakan persamaan:

$$R = x_{maks} - x_{min}$$

R = jangkauan/range/rentang

x_{maks} = nilai tengah kelas terakhir

x_{min} = nilai tengah kelas pertama

2. Jangkauan Antarkuartil

Jangkauan antarkuartil juga disebut hamparan. Bagaimana cara menentukan jangkauan antarkuartil?

Perhatikan contoh pada subbab jangkauan untuk data tunggal. Diperoleh nilai kuartil pertama Q_1 = 5,5 dan kuartil ketiga Q_3 = 7,5. Jadi, jangkauan antarkuartilnya adalah H = 7,5 – 5,5 = 2.

Dapat disimpulkan bahwa:

Jangkauan antarkuartil adalah selisih antara kuartil ketiga dengan kuartil pertama.

Untuk menentukan jangkauan antarkuartil, dapat digunakan persamaan:

$$H = Q_3 - Q_1$$

Keterangan:

H = jangkauan antarkuartil (hamparan)

Q_3 = kuartil ketiga

Q_1 = kuartil pertama

3. Jangkauan semi antarkuartil

Jangkauan semi antarkuartil juga disebut simpangan kuartil. Apa hubungan antara jangkauan semi antarkuartil dengan jangkauan antarkuartil?

Untuk mengetahuinya, perhatikan contoh 1.7. Diperoleh nilai jangkauan antarkuartil $H = 2$, nilai jangkauan semi antarkuartilnya adalah $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Dapat disimpulkan bahwa:

> Jangkauan semi antarkuartil adalah nilai dari setengah kali jangkauan antarkuartil.

Pengertian di atas dapat dinyatakan dalam persamaan:

$$\boxed{Q_d = \frac{1}{2} H = \frac{1}{2} (Q_3 - Q_1)}$$

Keterangan:

Q_d = jangkauan semi antarkuartil

4. Langkah

Apabila nilai jangkauan antarkuartilnya dikalikan satu setengah, maka diperoleh langkah sebesar:

$$L = 1\frac{1}{2} H = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa:

> Langkah adalah nilai dari satu setengah dikalikan jangkauan antarkuartil.

Pengertian tersebut dapat ditunjukkan dengan persamaan:

$$\boxed{L = 1\frac{1}{2} H = \frac{3}{2} (Q_3 - Q_1)}$$

5. Pagar Dalam dan Pagar Luar

Untuk menentukan pagar dalam dan pagar luar, coba Anda lihat kembali hasil pada contoh sebelumnya. Apakah ada hubungannya?

Bila diperoleh, pagar dalam $= Q_1 - L = 5,5 - 3 = 2,5$

pagar luar $= Q_3 + L = 7,5 + 3 = 10,5$

Dapat disimpulkan bahwa untuk menentukan pagar dalam dan luar digunakan persamaan:

$$\boxed{\text{Pagar dalam} = Q_1 - L}\qquad\qquad \boxed{\text{Pagar luar} = Q_3 + L}$$

Sehingga dapat didefinisikan:

Pagar dalam adalah nilai data yang berada satu langkah di bawah kuartil pertama.

Pagar luar adalah nilai data yang berada satu langkah di atas kuartil ketiga.

Pagar dalam dan pagar luar berfungsi sebagai batas penentu normal atau tidaknya suatu data.

Data x_i dikatakan normal apabila nilai data yang satu dengan nilai data yang lain tidak jauh berbeda dan terletak di antara batas–batas pagar dalam dan pagar luar.

$$\boxed{Q_1 - L \leq x_i \leq Q_3 + L}$$

Data x_i dikatakan tidak normal apabila nilai data tersebut tidak konsisten dalam kelompoknya, dan terletak kurang dari pagar dalam dan lebih dari pagar luar.

$$\boxed{Q_1 - L \geq x_i \geq Q_3 + L}$$

Data yang tidak konsisten dalam kelompoknya disebut pancilan atau data liar. Pencilan pada suatu kumpulan data menimbulkan kecurigaan sehingga pencilan itu perlu dikaji secara seksama. Apa yang menjadi penyebabnya? Munculnya data pencilan dalam suatu kumpulan data dapat terjadi akibat kesalahan ketika mencatat data dan juga kesalahan ketika melakukan pengukuran.

6. Statistik Lima Serangkai

Nilai–nilai statistik seperti jangkauan, jangkauan antarkuartil, jangkauan semi antarkuartil, langkah, pagar dalam, dan pagar luar akan lebih mudah ditentukan apabila kumpulan data disajikan dengan

menggunakan statistik lima serangkai dalam bentuk bagan.

Untuk lebih jelasnya, simaklah contoh berikut.

Contoh 1.8

Diketahui data 31, 32, 27, 28, 29, 36, 35, 32, 34, tentukanlah:

a. Statistik lima serangkai
b. Jangkauan
c. Jangkauan antarkuartil
d. Jangkauan semi antarkuartil
e. Langkah
f. Pagar dalam dan pagar luar
g. Jika terdapat nilai 10 dan 50, apakah kedua nilai data tersebut konsisten dalam kumpulan data yang sudah diketahui?

Jawab:

a. Statistik lima serangkai
   - Urutkan data dari data yang terkecil hingga yang terbesar membentuk statistik jajaran, sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 27 & 28 & 29 & 31 & 32 & 32 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} \end{array}$$

   - Tentukan kuartil dengan mencari letak Q_1, Q_2, dan Q_3.

$$\text{Letak } Q_1 = \text{data ke–}\left[\frac{1}{4}(11+1)\right] = \text{data ke–3, yaitu } Q_1 = x_3 = 29$$

$$\text{Letak } Q_2 = \text{data ke–}\left[\frac{2}{4}(11+1)\right] = \text{data ke–6, yaitu } Q_2 = x_6 = 32$$

$$\text{Letak } Q_3 = \text{data ke–}\left[\frac{3}{4}(11+1)\right] = \text{data ke–9, yaitu } Q_3 = x_9 = 36$$

Jadi, statistik lima serangkai dapat disajikan pada tabel berikut.

$Q_2 = 32$	
$Q_1 = 29$ $x_{min} = 27$	$Q_3 = 36$ $x_{maks} = 38$

b. Jangkauan

$$\begin{aligned} R &= x_{maks} - x_{min} \\ &= 38 - 27 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Jadi, jangkauan dari data adalah 11.

c. Jangkauan antarkuartil

$H = Q_3 - Q_1$
$= 36 - 29$
$= 7$

Jadi, jangkauan antarkuartil dari data adalah 7.

d. Jangkauan semi antarkuartil,

$$Q_d = \frac{1}{2}H$$
$$= \frac{1}{2} \times 7$$
$$= 3{,}5$$

Jadi, jangkauan semi antarkuartil dari data adalah 3,5.

e. Langkah, $L = 1{,}5\ H$
$= 1{,}5 \times 7$
$= 10{,}5$

Jadi, langkah dari data adalah 10,5.

f. Pagar dalam $= Q_1 - L$
$= 29 - 10{,}5$
$= 18{,}5$

Pagar luar $= Q_3 + L$
$= 36{,}5 + 10{,}5$
$= 46{,}5$

Jadi, pagar dalam dari data 18,5 dan pagar luar 46,5.

g. Karena 10 lebih kecil dari pagar dalam dan 50 lebih besar dari pagar luar, nilai data 10 dan 50 tidak konsisten terhadap kumpulan data pada soal tersebut.

7. Simpangan Rata–Rata

Pada subbab terdahulu, Anda telah mempelajari nilai mean atau rata–rata hitung dari kumpulan data. Bagaimanakah hubungan ukuran penyebaran data terhadap rata–rata data tersebut? Untuk mengetahuinya, marilah kita simak contoh berikut ini.

Diketahui hasil dari pengukuran adalah 3, 4, 5, 6, 8, 9. Penyebaran nilai data terhadap rata–ratanya dapat ditentukan dengan langkah–langkah berikut.

a. Sebelumnya, Anda menentukan terlebih dahulu nilai rata–rata dari data dengan $n = 5$, yaitu:

$$\bar{x} = \frac{3+4+6+8+9}{5}$$
$$= \frac{30}{5}$$
$$= 6$$

b. Tuangkan data-data tersebut dalam tabel.

Tabel 1.22

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
3	–3	3
4	–2	2
6	0	0
8	2	2
9	3	3

c. Selanjutnya dari tabel tersebut, simpangan rata–rata data dapat diperoleh dengan persamaan:

$$SR = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \bar{x} \rvert$$

$$= \frac{1}{5}(3 + 2 + 0 + 2 + 3)$$

$$= \frac{10}{5}$$

$$= 2$$

Jadi, simpangan rata–rata data tersebut adalah 2.

Dari contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

> Simpangan rata–rata atau deviasi rata–rata adalah ukuran yang menyatakan seberapa besar penyebaran tiap nilai data terhadap nilai meannya (rata–ratanya).

Bila diketahui data tunggal x_1, x_2, x_3, ..., x_n dengan rata–rata $\bar{x}$ maka simpangan dari x_1 adalah $x_1 - \bar{x}$, simpangan dari x_2 adalah $x_2 - \bar{x}$, dan seterusnya sehingga diperoleh jumlah nilai mutlak simpangan, yaitu:

$$\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \bar{x} \rvert = \lvert x_1 - \bar{x} \rvert + \lvert x_2 - \bar{x} \rvert + ... + \lvert x_n - \bar{x} \rvert$$

Simpangan rata–rata dapat didefinisikan sebagai:

$$\boxed{SR = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - \bar{x} \rvert}$$

Keterangan:

SR = simpangan rata–rata

n = banyaknya data

x_i = data ke–i

i = 1, 2, 3, ..., n

$\bar{x}$ = mean (rata–rata hitung)

Untuk data dari tabel distribusi frekuensi, simpangan rata–rata dapat ditentukan dengan persamaan:

$$SR = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \left| x_i - \overline{x} \right|$$

Keterangan:

f_i = frekuensi data ke–i

n = banyaknya data

Untuk memahaminya perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 1.9

Data pengukuran berat masing–masing barang elektronik bila akan ditentukan simpangan rata–ratanya, maka tabel menjadi:

Tabel 1.23

Berat	Titik tengah (x_i)	frekuensi (f_i)	$f_i\ x_i$	$x_i - \overline{x}$	$f_i \left| x_i - \overline{x} \right|$
11–15	13	1	13	–16	16
16–20	18	4	72	–11	44
21–25	23	8	184	–6	48
26–30	28	10	280	–1	10
31–35	33	9	297	4	36
36–40	38	6	228	9	54
41–45	43	2	86	14	28
Jumlah	–	40	1160		236

Maka diperoleh

$$SR = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \left| x_i - \overline{x} \right|$$

$$= \frac{1}{40} \cdot 236$$

$$= 5{,}9$$

Jadi, simpangan rata–rata data pada tabel 1.23 adalah 5,9.

8. Variansi dan Simpangan Baku

Ukuran penyebaran data yang paling sering digunakan adalah variansi (ragam) dan simpangan baku (standar deviasi). Ragam dan simpangan baku menjelaskan penyebaran data di sekitar rataan. Pada bagian ini, kita hanya akan membahas cara menghitung dan mendapatkan ragam dan simpangan baku dari suatu data, sedangkan kegunaannya belum akan dipelajari pada bab ini.

a. Variansi (Ragam)

Coba Anda ingat kembali cara menentukan nilai mean atau rata–rata hitung dari suatu data. Mean atau rata–rata hitung mewakili suatu

data sehingga dalam pengamatan diharapkan nilai data lebih kecil dari nilai rata–rata.

Untuk memahaminya, perhatikan nilai–nilai berikut: 1, 4, 8, 10, 12. Rata–rata data tersebut ($\overline{x}$) adalah 7 dan simpangan dari masing–masing data ($x_i - \overline{x}$) adalah –6, –3, 1, 3, 5.
Bila Anda perhatikan, jumlah dari simpangan di atas adalah nol.

Misalnya, kumpulan data $x_1, x_2, ..., x_n$ mempunyai rata–rata $\overline{x}$, maka simpangan masing–masing data dari rata–ratanya adalah $(x_1 - \overline{x})$, $(x_2 - \overline{x})$, ..., $(x_n - \overline{x})$. Jumlah dari semua simpangan $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = (x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + ... + (x_n - \overline{x})$ harus sama dengan nol. Untuk mengatasi hal itu, diperlukan suatu ukuran penyebaran, yaitu variansi (ragam). Variansi didasarkan pada jumlah kuadrat dari simpangan, didefinisikan sebagai:

> Variansi (ragam) adalah rata–rata dari jumlah kuadrat simpangan tiap data.

Persamaan berikut digunakan untuk menentukan besarnya variansi (ragam).

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

dengan s^2 = variansi/ragam

Maka, nilai variansi/ragam dari data pada contoh di atas adalah:

$$\begin{aligned} s^2 &= ((-6)^2 + (-3)^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2) \\ &= \frac{1}{5}(36 + 9 + 1 + 9 + 25) \\ &= \frac{80}{5} \\ &= 16 \end{aligned}$$

Jadi, variansi dari data adalah 16.

Untuk data berkelompok atau data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi, variansi atau ragam dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2$$

Untuk memahami penggunaannya, perhatikan contoh berikut ini!

Dari data pada tabel 1.24 diperoleh data mengenai berat barang elektronik. Variansi/ragam dari data tersebut dapat ditentukan, yaitu dengan mengkuadratkan simpangannya. Bila rata–rata data $\bar{x}$ = 29, maka:

Tabel 1.24

Berat	x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i\,(x_i - \bar{x})^2$
11–15	13	1	–16	256	256
16–20	18	4	–11	121	484
21–25	23	8	–6	36	283
26–30	28	10	–1	1	10
31–35	33	9	4	16	144
36–40	38	6	9	81	486
41–45	43	2	14	196	392
Jumlah	–	40	–	–	2060

Maka diperoleh:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{40}(2060)$$

$$= 51{,}5$$

Jadi, variansi atau ragam data pada tabel adalah 51,5.

b. Simpangan Baku (Standar Deviasi)

Untuk mengatasi kesulitan menafsirkan ukuran penyebaran data yang dinyatakan dalam satuan kuadrat yaitu variansi (ragam), digunakan suatu ukuran yang disebut simpangan baku atau standar deviasi. Simpangan baku mengukur penyebaran data dengan satuan yang sama dengan satuan data.

Bila satuan kuadrat merupakan bentuk variansi atau ragam, apa hubungan variansi dengan simpangan baku?

Untuk mengetahuinya, simaklah contoh berikut ini.

Data dari tabel 1.24 diperoleh nilai variansi atau ragam, yaitu s^2 = 51,5, simpangan bakunya adalah:

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$= \sqrt{51{,}5}$$

$$= 7{,}18$$

Jadi, nilai simpangan bakunya adalah 7,18.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

Simpangan baku atau standar deviasi adalah nilai akar dari variansi atau ragam.

Simpangan baku/standar deviasi dapat dihitung dengan persamaan:

1) Untuk data tunggal

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

2) Untuk data berkelompok

$$s = \sqrt{s^2}$$

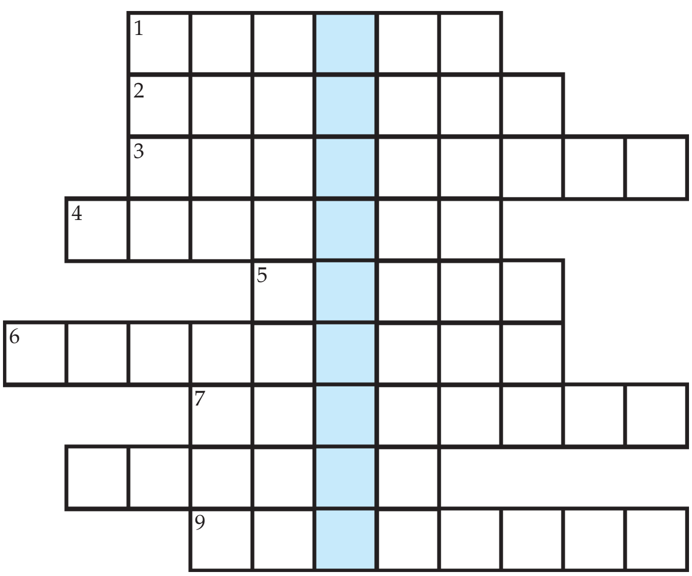
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2$$

dengan s = simpangan baku/standar deviasi

s^2 = ragam/variansi

Tugas Individu

Isilah kotak–kotak berikut dengan cara mendatar!



Pertanyaan:
1. Bagian dari populasi
2. Simpangan
3. Banyaknya data tiap kelas
4. Ukuran pembagi data menjadi 4 bagian
5. Nilai yang paling sering muncul
6. Penyajian data dengan batang tegak dan berimpitan
7. Ragam
8. Nilai tengah
9. Jangkauan antarkuartil

Jika Anda menjawab dengan benar, Anda akan menemukan sebuah kata pada kotak yang diarsir. Kata apakah itu? Coba Anda jelaskan artinya!

Latihan 5

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Diketahui kumpulan data dari nilai ulangan susulan dua kelas sebagai berikut.

   Kelas XI program IPS 1 = 31, 25, 30, 46, 36, 25, 28, 45, 30, 40

   Kelas XI program IPS 2 = 49, 42, 40, 25, 26, 37, 50, 51, 45, 31

   Bila data nilai kedua kelas tersebut digabung, Tentukan:
   a. jangkauan;
   b. jangkauan antarkuartil;
   c. simpangan kuartil;
   d. langkah;
   e. pagar dalam dan pagar luar;
   f. data pencilan!

2.

53	
45	57
39	80

   Dari susunan statistik lima serangkai di atas, tentukan:
   a. hamparan;
   b. langkah;

c. pagar dalam dan pagar luar;

d. jika terdapat nilai 40 dan 90, apakah kedua nilai tersebut konsisten dalam kumpulan data yang sudah diketahui?

3. Data dari pengukuran tinggi badan siswa sebagai berikut.

Tinggi	Frekuensi
141–145	4
146–150	9
151–155	17
156–160	11
161–165	9

a. Berapakah simpangan rata–ratanya?

b. Tentukan variansi dan simpangan bakunya!

4. Data suatu pengukuran adalah 10, 44, 55, 56, 62, 65, 72, 76. Apabila simpangan rata–ratanya 14, maka berapakah variansi dan simpangan bakunya?

5. Perhatikan data di bawah ini!

Nilai	Frekuensi
3	2
4	5
5	x
6	12
7	11
8	5
9	1

Apabila nilai rata–ratanya adalah 6, tentukan:

a. nilai x;

b. simpangan baku!

Rangkuman

1. Statistik adalah kumpulan angka atau nilai yang menggambarkan karakteristik suatu kumpulan data.
2. Statistika adalah ilmu pengetahuan yang berhubungan dengan cara–cara pengumpulan, pengolahan, penyajian, dan penafsiran data serta penarikan kesimpulan dari data tersebut.
3. Penyajian data dalam bentuk tabel ada dua, yaitu tabel baris kolom, dan tabel distribusi frekuensi.
4. Menurut kaidah empiris Sturgess, banyak kelas dari data dinyatakan dengan persamaan: $k = 1 + 3{,}3 \log n$, dengan k = banyak kelas, n = banyak data
5. Panjang kelas (p) dinyatakan dengan persamaan $p = \frac{R}{k}$, dengan p = panjang kelas, R = jangkauan/range, k = banyak kelas.
6. Penyajian data dalam bentuk diagram ada beberapa macam, antara lain diagram batang, diagram garis, dan diagram lingkaran.
7. Frekuensi kumulatif dapat disajikan dalam bentuk kurva yang disebut *ogive*.
8. Tabel distribusi frekuensi dapat disajikan dalam bentuk diagram, yaitu histogram dan poligon frekuensi.
9. Mean (rata–rata hitung) dirumuskan:

   a. Untuk data tunggal $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

   b. Untuk data berkelompok $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i . x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

   dengan $\bar{x}$ = rata–rata, $\bar{x}_i$ = data ke–i, f_i = frekuensi ke–i, n = banyaknya data.

10. Modus adalah nilai yang paling sering muncul atau memiliki frekuensi tertinggi. Untuk data berkelompok, modus dirumuskan dengan $Mo = b + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)p$, dengan Mo = modus, b = tepi bawah kelas modus, d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya, d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya, p = panjang kelas.

11. Median (Me) untuk data tunggal

    a. Ukuran data n ganjil, dengan n banyak data,

    $$Me = \text{data ke–}\frac{n+1}{2}$$

    b. Ukuran data n genap, dengan n banyak data

    $$Me = \frac{1}{2}\left(\text{data ke}-\left(\frac{n}{2}\right) + \text{data ke}-\left(\frac{n}{2}+2\right)\right)$$

12. Median (Me) untuk data berkelompok dirumuskan $Me = b + \left(\frac{\frac{1}{2}n - F_s}{f_s}\right)p$

    dengan b = tepi bawah kelas median, n = banyak data, F_s = frekuensi kumulatif sebelum kelas median, f_s = frekuensi kelas median, p = panjang kelas.

13. Letak quartil (Q_i)

    a. Untuk data tunggal letak Q_i = data ke–$\left[\frac{i}{4}(n+1)\right]$, i = 1, 2, 3

    b. Untuk data berkelompok $Q_i = b + \left[\frac{\frac{i}{4}n - F_k}{f_k}\right] \cdot p$

    dengan b = tepi bawah kelas kuartil, F_k = frekuensi kumulatif sebelum kelas kuartil, f_k = frekuensi kelas kuartil, p = panjang kelas, n = banyak data, i = 1, 2, 3.

14. Desil adalah nilai pembatas yang membagi data terurut menjadi sepuluh bagian yang sama. Terdiri dari desil pertama (D_1), desil kedua (D_2), ..., desil sembilan (D_9).

15. Jangkauan/range/rentang $R = x_{maks} - x_{min}$, dengan x_{maks} = data terbesar atau nilai tengah kelas terakhir, x_{mins} = data terkecil atau nilai tengah kelas pertama.
16. Statistik lima serangkai dapat disajikan sebagai berikut.

Q_2	
Q_1 x_{maks}	Q_3 x_{min}

17. Jangkauan antarkuartil/hamparan (H) dirumuskan $H = Q_3 - Q_1$
18. Jangkauan semi antarkuartil (Q_d), dirumuskan dengan

$$Q_d = \frac{1}{2}H = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

19. Langkah $L = 1\frac{1}{2}H = \frac{3}{2}(Q_3 - Q_1)$
20. Pagar dalam = $Q_1 - L$

Pagar luar = $Q_3 - L$
21. Simpangan rata–rata (SR)

a. Untuk data tunggal $SR = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$

b. Untuk data berkelompok $SR = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\,|x_i - \bar{x}|$
22. Variansi/ragam (s^2)

a. Untuk data tunggal $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

b. Untuk data berkelompok $s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i.(x_i - \bar{x})^2$
23. Simpangan baku/standar deviasi (s)

a. Untuk data tunggal $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

b. Untuk data berkelompok $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\,(x_i - \bar{x})^2}$

Uji Kompetensi

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini dengan benar!

1. Berikut ini adalah data hasil panen padi dan jagung di daerah "Sukatani", dalam kg.

Tahun	Hasil padi	Hasil jagung
2003	100.000	20.000
2004	120.000	30.000
2005	140.000	40.000
2006	150.000	50.000
2007	160.000	80.000
2008	180.000	90.000

   Gambarkan hasil panen tersebut dalam satu diagram batang!

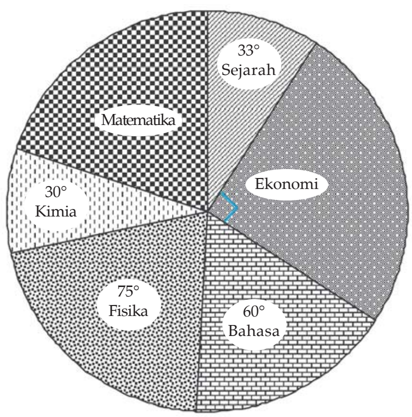
2. 

   Diagram di atas menunjukkan banyak buku pelajaran yang tersedia di perpustakaan. Buku ekonomi yang tersedia di perpustakaan berjumlah 240 buah.

   a. Berapa banyak buku matematika yang tersedia?

   b. Berapa prosentase jumlah masing–masing buku?

3. Buatlah *ogive* positif dan *ogive* negatif dari dalam tabel berikut ini!

Nilai	Frekuensi
30–39	2
40–49	5
50–59	8
60–69	11
70–79	7
80–89	4
90–99	3

4. Nilai ulangan harian matematika dari dua kelas XI program IPS, disajikan dalam tabel berikut!

Nilai	Frekuensi
31–40	2
41–50	4
51–60	5
61–70	15
71–80	24
81–90	21
91–100	9

Tentukan mean data dengan metode biasa dan *coding*!

5. Nilai rata–rata 10 anak adalah 8,5. Jika ditambah dengan nilai 2 anak lagi rata–ratanya menjadi 8. Berapakah jumlah nilai dari 2 anak tersebut?
6. Dalam sebuah RW diadakan pendataan keluarga yang memiliki anak yang masih bersekolah. Hasilnya disajikan tabel berikut ini.

Banyak anak	Frekuensi
0	4
1	10
2	44
3	26
4	8

a. Berapakah prosentase anak yang bersekolah dari keluarga yang memiliki anak kurang dari atau sama dengan 2?

b. Berapa prosentase anak yang bersekolah dari keluarga yang memiliki anak lebih dari 2?

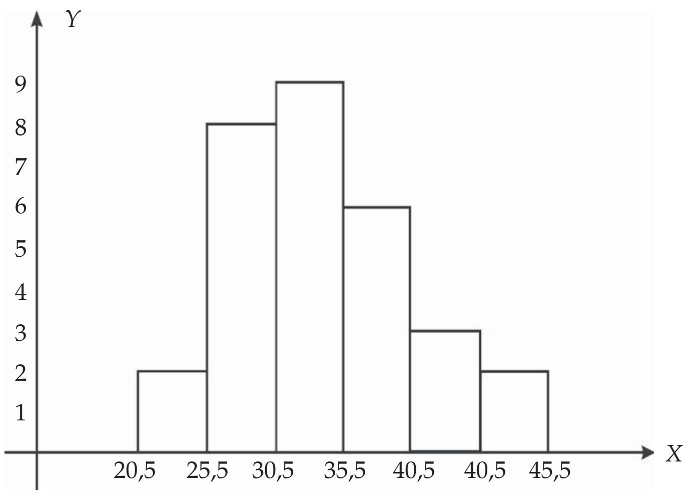
7. Nilai rata–rata latihan ujian semester kelas XI program IPS di SMA "Favorit" yang terdiri dari kelas *A*, kelas *B*, dan kelas *C* adalah 6,5. Kelas A yang terdiri dari 34 siswa memperoleh nilai rata–rata 6,8. Kelas *B* yang terdiri dari 32 siswa memperoleh nilai rata–rata 6,2. Berapakah jumlah siswa di kelas tersebut?

8. Perhatikan tabel berikut!

Kelas	Frekuensi
30–34	4
35–39	x
40–44	16
45–49	7
50–54	y

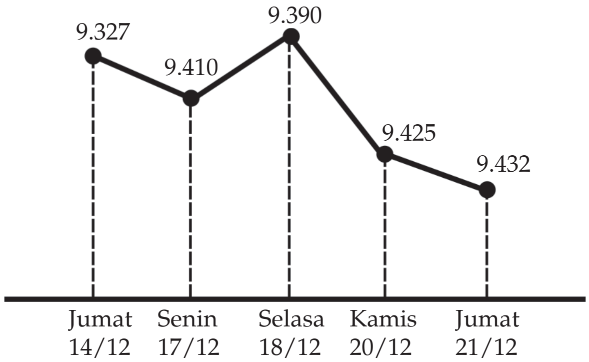
Tentukan nilai y apabila kelas modus berada di kelas 40–44 dan nilai modusnya adalah 41,5!

9. Perhatikan histogram berikut!



Berapa median dari histogram di atas?

10. Perhatikan diagram garis di bawah!



Sumber: Suara Merdeka, 26 Desember 2007

Tentukan nilai kuartil pertama, kuartil kedua dan kuartil ketiga dari data kurs rupian terhadap dolar di atas!

11. Perhatikan tabel berikut ini!

Tinggi siswa (cm)	145	155	158	162	165	166	170	181
Banyak siswa	4	3	10	8	5	4	4	2

Tentukan statistik lima serangkai data pada tabel di atas!

12. Seorang polisi mencatat kecepatan kendaraan dalam km/jam dengan hasil sebagai berikut.

89	120	70	90	80	84	89	85	89	82
85	80	95	105	70	86	95	88	81	102
79	75	91	78	84	95	100	85	83	92

Buatlah tabel distribusi frekuensinya, kemudian tentukan nilai desil keempat dan desil ketujuh!

13. Perhatikan statistik lima serangkai di bawah ini.

$Q_2 = 270$	
$Q_1 = 240$	$Q_3 = 300$
$x_{min} = 210$	$x_{maks} = 400$

a. Tentukan jangkauan!
b. Tentukan langkah!
c. Tentukan pagar dalam dan pagar luar!

14. Data skor test IQ dari 10 siswa kelas XI sebagai berikut.

127	120	123	105	111	112	98	109	100	95

Berapakah variansi dan simpangan baku dari data tersebut?

15. Jumlah gedung sekolah dari 8 daerah, masing–masing adalah:

15	20	21	16	12	14	a	18

Apabila simpangan rata–ratanya adalah 2,5 dan meannya adalah 13, berapakah nilai a?

Pengayaan

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Rata-rata nilai ujian yang diikuti oleh 42 siswa adalah 30. Karena rata-ratanya terlalu rendah, semua nilai ujian siswa dikalikan 2 kemudian dikurangi 5. Berapakah rata-rata nilai ujian yang baru?
2. Gaji rata-rata suatu perusahaan per hari adalah Rp250.000,00. Gaji rata-rata pegawai pria Rp260.000,00, sedangkan gaji rata-rata pegawai wanita Rp210.000,00. Berapakah perbandingan jumlah pegawai pria dan wanita pada perusahaan itu?
3. Keluarga pak Rahmat mempunyai empat orang anak masing-masing beratnya sebagai berikut: berat anak termuda $(2x + 9)$, berat anak tertua $(2x)$ kg, dan berat dua anak lainnya $(2x – 2)$ dan $(x + 3)$ kg. Jika berat rata-rata dari keempat anak tersebut adalah 55 kg. Tentukan nilai x dan berat badan masing–masing anak!
4. x_o adalah rata–rata dari data x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. Jika data berubah mengikuti pola $\frac{1}{2}x_1 + 2$, $\frac{1}{2}x_2 + 4$, $\frac{1}{2}x_2 + 4$, $\frac{1}{2}x_3 + 6$, ..., maka berapakah nilai rata-rata yang baru?
5. Tiga buah data x_1, x_2, x_3 memiliki jangkauan 9, rata-rata ketiga data tersebut adalah 6. Jika data terkecil dikalikan 2 dan data terbesar dikurangi 3, maka jangkauannya berubah menjadi 4. Tentukanlah ketiga data itu!

Bab 2
Peluang

Standar Kompetensi

Menggunakan aturan statistika, kaidah pencacahan, dan sifat-sifat peluang dalam pemecahan masalah

Kompetensi Dasar

- Menggunakan aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi dalam pemecahan masalah
- Menentukan ruang sampel suatu percobaan
- Menentukan peluang suatu kejadian dan penafsirannya

Peta Konsep

- Kaidah Pencacahan
- Permutasi
- Kombinasi
  - Peluang
    - Peluang Suatu Kejadian
    - Peluang Kejadian Majemuk
      - Komplemen Suatu Kejadian
      - Kejadian Saling/ Tidak Saling Lepas
      - Kejadian Saling/ Tidak Saling Bebas
      - Kejadian Bersyarat

Sumber: http://cybertech.cbn.net.id

Gambar 2.1

Banyak aspek dalam kehidupan sehari–hari yang didasarkan pada peluang kejadian yang mungkin di luar jangkauan kita. Dengan matematika, besarnya peluang yang mungkin dari kejadian–kejadian tertentu dapat diprediksi. Misalnya para ahli meteorology ingin mengetahui peluang dari petir yang menyambar daerah–daerah tertentu. Bagaimanakah cara menentukannya?

Dengan mempelajari pembahasan tentang peluang pada bab ini, Anda diharapkan dapat menyelesaikan permasalahan tersebut.

A. Kaidah Pencacahan

Dalam kehidupan sehari–hari, Anda tentu sering dihadapkan pada pemecahan masalah yang berkaitan dengan menentukan atau menghitung berapa banyak cara yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan. Sebagai ilustrasi, simaklah contoh berikut ini.

Contoh 2.1

Pada waktu liburan sekolah, Mita bersama keluarganya berlibur ke Bali. Ia mencoba 3 macam kaos dan 2 celana jeans. Ia memadukan ketiga kaos dan kedua jeans tersebut. Berapa banyak pasangan warna kaos dan celana yang dapat disusun Mita?

Permasalah di atas dapat Anda selesaikan dengan menggunakan kaidah pencacahan (*counting rules*). Kaidah pencacahan memudahkan kita untuk menentukan banyaknya cara yang mungkin, jika beberapa kejadian digabungkan. Sehingga dapat dikatakan bahwa:

Kaidah pencacahan adalah suatu cara atau aturan untuk menghitung semula kemungkinan yang dapat terjadi dalam suatu percobaan.

Banyak cara yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan dapat ditentukan dengan menggunakan salah satu gabungan dari metode, yaitu metode aturan pengisian tempat, metode permutasi, dan metode kombinasi.

1. Aturan Pengisian Tempat (*Filling Slots*)

Untuk memahami kaidah pencacahan dengan menggunakan aturan pengisian tempat, Anda perhatikan kembali permasalahan pada contoh 2.1 di atas.

Dalam contoh tersebut tersedia 3 buah kaos, misalnya berwarna abu–abu, kuning, dan putih, serta 2 buah celana jeans, misalnya berwarna biru dan hitam. Banyak pasangan warna celana dan kaos yang mungkin disusun dapat Anda cari dengan beberapa cara, antara lain :

a. Diagram Pohon

Perhatikan diagram pohon berikut ini!

Warna celana jeans	warna kaos	pasangan warna
Biru (b)	Abu–abu(a)	(b, a)
	Kuning (k)	(b, k)
	Putih (p)	(b, p)
Hitam (h)	Abu–abu(a)	(h, a)
	Kuning(k)	(h, k)
	Putih (p)	(h,p)

Berdasarkan diagram pohon di atas, pasangan warna celana jeans dan kaos yang dapat disusun ada 6 macam, yaitu (b, a), (b, k), (b, p), (h, a), (h, k), dan (h, p). Pasangan (b, a) artinya celana jeans biru dan kaos abu–abu, demikian seterusnya.

b. Tabel Silang

Perhatikan tabel silang berikut ini !

Tabel 2.1

Warna kaos / Warna celana jeans	Abu–abu (a)	Kuning (k)	Putih (p)
Biru (b)	(b, a)	(b, k)	(h, p)
Hitam (h)	(h, a)	(h, k)	(h, p)

Berdasarkan tabel silang di atas, terlihat bahwa pasangan warna celana jeans yang dapat disusun ada 6 macam.

c. Pasangan berurutan

Dimisalkan, himpunan celana jeans dinyatakan dengan A : $\{b, a\}$ dan himpunan kaos dinyatakan dengan B: $\{a, k, p\}$. Himpunan pasangan berurutan dari himpunan A dan himpunan B ditulis sebagai: $\{(b, a), (b, k),(b, p),(h, a)(h, k),(h, p)\}$.

Jadi, pasangan warna celana jeans dan kaos yang dapat disusun ada 6 macam.

Berdasarkan percobaan yang dilakukan Mita di atas, diperoleh 6 macam pasangan warna. Cara lain untuk menentukan banyak pasangan warna celana jeans dan kaos yang dapat disusun adalah dengan menggunakan aturan, yaitu:

1) Pertama dipilih warna celana: ada 2 cara
2) Kedua dipilih warna kaos: ada 3 cara

Maka, untuk memilih pasangan warna celana jeans dan kaos seluruhnya ada $2 \times 3 = 6$ cara. Aturan yang digunakan tersebut dikenal sebagai aturan pengisian tempat (*filling slots*). Karena dalam menentukan banyak cara untuk mengisi n tempat yang tersedia, maka aturan tersebut sering dikenal sebagai aturan perkalian.

Secara umum, dapat disimpulkan bahwa:

Misalkan terdapat n buah tempat yang tersedia dengan k_1 menyatakan banyak cara untuk mengisi tempat pertama, k_2 menyatakan banyak cara untuk mengisi tempat kedua setelah tempat pertama terisi, demikian seterusnya sampai k_n menyatakan banyak cara untuk mengisi tempat ke–n setelah tempat, pertama, kedua, ..., dan (n–1) terisi. Maka:

Banyak cara untuk mengisi n tempat yang tersedia secara keseluruhan adalah:

$k_1 \times k_2 \times ... \times k_n$

Agar lebih jelas memahami aturan pengisian tempat, perhatikan contoh berikut ini:

Contoh 2.2

Andhi hendak bepergian dari kota Surabaya ke kota Jakarta melalui kota Yogyakarta dan kota Semarang. Dari Surabaya ke Yogyakarta ada 3 jalur dan dari Yogyakarta ke Jakarta ada 6 jalur. Sedangkan dari Surabaya ke Semarang ada 4 jalur dan dari Semarang ke Jakarta ada 5 jalur. Dari Yogyakarta ke Semarang atau sebaliknya tidak ada jalur.

a. Gambarkan jalur yang menghubungkan kota Surabaya dan Jakarta tersebut!
b. Berapa banyak cara yang dapat ditempuh untuk bepergian dari Surabaya ke Jakarta?

Jawab :

a.

b. Dari Surabaya ke Semarang dapat dipilih dengan 4 cara.
Dari Semarang ke Jakarta dapat dipilih dengan 5 cara.
Banyak cara bepergian dari Surabaya ke Jakarta melalui Semarang seluruhnya ada:

$$\boxed{4 \times 5 = 20 \text{ cara}}$$

Dari Surabaya ke Yogyakarta dapat dipilih dengan 3 cara
Dari Yogyakarta ke Jakarta dapat dipilih dengan 6 cara
Banyak cara bepergian dari Surabaya ke Jakarta melalui Yogyakarta seluruhnya ada:

$$\boxed{3 \times 6 = 18 \text{ cara}}$$

Jadi, banyak cara yang dapat ditempuh Andhi untuk bepergian dari Surabaya ke Jakarta melalui Semarang dan Yogyakarta seluruhnya ada :

$$\boxed{20 \text{ cara} + 18 \text{ cara} = 38 \text{ cara}}$$

Berdasarkan contoh 2.2 dapat disimpulkan bahwa:

Jika terdapat n buah peristiwa atau kejadian yang saling lepas, dengan:

C_1 adalah banyak cara pada peristiwa pertama

C_2 adalah banyak cara pada peristiwa kedua

...

C_n adalah banyak cara pada peristiwa ke–n

maka banyaknya cara untuk n peristiwa secara keseluruhan adalah:

$$\boxed{C_1 + C_2 + \ldots + C_n}$$

Latihan 1

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Sebuah penelitian akan mengembangkan 6 jenis bakteri pada 4 media yang berbeda. Berapa banyak cara yang mungkin untuk mengembangkan bakteri pada media yang tersedia?
2. Huruf–huruf pada kata L E S T A R I akan dibentuk susunan huruf sehingga dalam susunan itu tidak terdapat huruf yang sama. Berapa banyak cara untuk menyusun huruf–huruf itu jika:
   a. huruf pertama dimulai dengan huruf hidup (vokal);
   b. huruf pertama dimulai dengan huruf mati (konsonan)?
3. Lima puluh orang siswa dalam satu kelas akan membentuk pengurus kelas yang baru. Pengurus kelas yang terdiri dari satu orang ketua, satu orang sekretaris, dan satu orang bendahara. Ada berapa cara untuk membentuk pengurus kelas jika:
   a. setiap siswa berhak dipilih;
   b. terdapat 10 orang calon pengurus yang diusulkan?
4. Angka–angka 1,2,3,4,5 dan 6 akan disusun suatu bilangan yang terdiri dari 4 angka yang nilainya lebih dari 4000. Berapa banyak bilangan yang terbentuk jika angka–angkanya:
   a. boleh berulang;
   b. tidak boleh berulang;
   c. semua bilangan genap?
5. Jalur penerbangan sebuah pesawat udara dari Bali ke Jakarta dapat melalui 2 jalur, dari Jakarta ke Medan dapat melalui 3 jalur. Sedangkan dari Bali ke Bogor dapat melalui 3 jalur, dan dari Bogor ke Medan dapat melalui 4 jalur. Berapa banyak jalur penerbangan yang dapat dipilih untuk penerbangan:
   a. dari Bali ke Medan melalui Jakarta;
   b. dari Bali ke Medan melalui Bogor;
   c. dari Bali ke Medan melalui Jakarta dan Bogor?

2. Notasi Faktorial

Dalam proses perhitungan selanjutnya, diperlukan suatu notasi yang mewakili perkalian dengan bilangan bulat positif atau bilangan asli, yaitu notasi faktorial. Bagaimanakah bentuk notasi faktorial? Untuk mengetahuinya, perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 2.3

1. $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
2. $3!5! = 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

3. $5! - 4! = (5x4x3x2x1) - (4x3x2x1)$
$= 120 - 24$
$= 96$

4. $2! + 3! = (2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1)$
$= 2 + 6$
$= 8$

5. $\frac{7!}{6!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 7$

Dari beberapa contoh di atas, faktorial dari n bilangan asli atau bilangan bulat positif didefinisikan sebagai :

> $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$
> Notasi $n!$ dibaca sebagai n faktorial
> Didefinisikan pula bahwa $0! = 1! = 1$

Latihan 2

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Hitunglah nilai dari bentuk :
   a. $10!$
   b. $4! + 6!$
   c. $7! - 5!$
   d. $8!3!$
   e. $\frac{9!}{2!}$
2. Tentukan nilai dari:
   a. $\frac{12!}{10!2!}$
   b. $\frac{2!4!}{8!}$
   c. $\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}$
   d. $\frac{5!3!}{2!4!}$
   e. $\frac{3}{4!} + \frac{10}{5!}$
3. Nyatakan dengan notasi faktorial dari:
   a. $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$
   b. $\frac{9\times8\times7}{6\times5}$
   c. $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2$

4. Tentukan nilai n yang memenuhi persamaan berikut.

a. $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 210$

d. $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$

c. $\dfrac{n!}{(n-1)!} = 2$

5. Buktikan bahwa :

a. $\dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{2!} = \dfrac{4}{3!}$

b. $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!} = \dfrac{15}{41}$

c. $n! - (n-1)! = (n-1)!\,(n-1)$, untuk $n > 1$

B. Permutasi

1. Permutasi dari Unsur–Unsur yang Berbeda

Pada subbab terdahulu, Anda telah mempelajari aturan pengisian tempat atau aturan perkalian. Untuk mengingat kembali, simaklah permasalahan berikut ini.

Misalkan dari tiga huruf a, b, dan c akan disusun suatu kata yang terdiri atas 3 angka dengan kata–kata itu tidak mempunyai huruf yang sama. Susunan yang dibentuk adalah :

abc *acb* *bac* *bca* *cab* *cba*

Banyak cara untuk membuat susunan diatas adalah $3 \times 2 \times 1 = 6$ cara. Susunan yang diperoleh diatas disebut permutasi 3 unsur yag diambil dari 3 unsur yang tersedia.

Apabila tiga huruf diatas akan disusun kata yang terdiri dari dua huruf dengan kata–kata tersebut tidak mempunyai huruf yang sama, maka susunan yang terbentuk adalah:

ab *ac* *ba* *bc* *ca* *cb*

banyak cara untuk membuat susunan diatas adalah $3 \times 2 = 6$ cara. Susunan yang diperoleh diatas disebut permutasi 2 unsur yang diambil dari 3 unsur yang tersedia.

Berdasarkan uraian diatas, dapat disimpulkan bahwa:

Permutasi r unsur yang diambil dari n unsur yang berbeda adalah susunan dari r unsur itu dalam suatu urutan ($r < n$).

Banyak permutasi dilambangkan dengan notasi

$$_nP_r = P_r^n$$

Dalam beberapa buku, permutasi juga dapat ditulis

$$^nP_r \text{ atau } P(n,r)$$

Apabila $r = n$ maka notasi permutasi menjadi $_nP_n = P_n^n$

Agar lebih jelas untuk memahaminya, pelajarilah contoh berikut ini :

Contoh 2.4

Berapakah banyak permutasi dari 4 huruf yaitu R, X, Y, Z?

Jawab:

Dengan menggunakan aturan perkalian, diperoleh banyak susunan yang mungkin : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$

Berdasarkan contoh diatas, terlihat bahwa banyak permutasi 4 unsur yang diambil dari 4 unsur yang tersedia adalah :

$P_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (4 - 1) \times (4 - 2) \times (4 - 3) = 4!$

Secara umum dapat disimpulkan bahwa:

> Banyak permutasi n unsur ditentukan dengan:
> $P_n^n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 = n!$

Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 2.5

Berapakah banyak permutasi 2 huruf yang diambil dari huruf–huruf W, X, Y, Z?

Jawab:

Dengan menggunakan aturan perkalian, banyak susunan yang mungkin adalah $5 \times 4 = 20$.

Berdasarkan contoh di atas, terlihat bahwa banyak permutasi 2 unsur yang diambil dari 4 unsur yang tersedia adalah :

$$P_2^4 = 5 \times 4 = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = \frac{5!}{3!} = \frac{5!}{(5-2)!}$$

Secara umum dapat disimpulkan bahwa:

> Banyak permutasi r yang diambil dari n unsur yang berbeda $(r \le n)$ ditentukan dengan:
>
> $$P_r^n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times ... \times (n - r + 1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Latihan 3

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Hitunglah tiap permutasi berikut ini.
   a. $P_6^{\,6}$
   b. $P_7^{\,10}$
   c. ${}_9P_3$
   d. ${}^{16}P_{10}$
   e. $P(8,4)$
2. Tuliskan notasi dari permutasi berikut ini!
   a. Banyak permutasi 4 unsur yang diambil dari 9 unsur yang tersedia.
   b. Banyak permutasi 8 unsur yang diambil dari 8 unsur yang tersedia.
   c. Banyak permutasi 10 unsur yang diambil dari 15 unsur yang tersedia.
3. Berapa banyak bilangan yang terdiri atas 5 angka yang disusun dari angka–angka 5,6,7,8, dan 9?
4. Tentukan banyaknya kemungkinan dalam pemilihan Presiden dan Wakil Presiden jika ada tujuh orang calon?
5. Carilah nilai n jika diketahui $P_3^{(n+1)} = P_4^{\,n}$!

2. Permutasi dengan Beberapa Unsur yang Sama

Permutasi yang telah Anda pelajari, mensyaratkan bahwa masing–masing dari n unsur berbeda atau tidak sama. Bagaimana jika n unsur yang tersedia memuat beberapa unsur yang sama ?

Untuk menjawab pertanyaan itu, simaklah contoh berikut ini

Contoh 2.6

Berapa banyak permutasi 3 huruf yang diambil dari huruf–huruf C, P dan P?

Jawab:

Unsur yang tersedia ada 3, yaitu huruf C, P, dan P.

Dari 3 unsur yang tersedia terdapat 2 unsur yang sama yaitu P

Banyak permutasi 3 unsur yang memuat 2 unsur yang sama adalah:

$$P = \frac{3!}{2!} = \frac{3\times2\times1}{2\times1} = 3$$

Jadi, banyak permutasinya ada 3 macam, yaitu CPP, PCP dan PPC.

Secara umum dapat disimpulkan bahwa:

$$\boxed{P = \frac{n!}{k!}}$$

Bagaimana permutasi dari n unsur jika terdapat lebih dari satu unsur yang sama? Untuk mengetahuinya simaklah contoh berikut ini:

Contoh 2.7

Berapa banyak permutasi 5 huruf yang diambil dari nama CECEP?

Jawab :

Nama CECEP tersusun dari 5 huruf, yaitu C, E, C, E dan P. Huruf yang sama, yaitu 2 huruf C dan 2 huruf E.

Banyak permutasi dari permasalahan tersebut adalah:

$$P = \frac{5!}{2!2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = 30$$

Jadi, banyak permutasinya ada 30 macam.

Secara umum dapat disimpulkan bahwa:

> Jika dari n unsur yang tersedia terdapat k dan m unsur yang sama, maka banyak permutasi dari unsur n tersebut adalah :
>
> $$P = \frac{n!}{k!m!}$$

Latihan 4

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tentukan banyak permutasi–permutasi berikut ini!
   a. 4 Unsur yang memuat 1 unsur yang sama.
   b. 7 Unsur yang memuat 4 unsur yang sama.
   c. 12 unsur yang memuat 3 unsur yang sama dan 5 unsur lain sama.
2. Tentukan susunan huruf yang dapat dibentuk dari kata berikut!
   a. SEKOLAH
   b. MENENGAH
   c. ATAS
3. Dalam suatu kotak berisi 9 buah kelereng yang terdiri dari 2 kelereng berwarna merah, 3 kelereng berwarna kuning, dan 4 kelereng berwarna hijau. Berapa banyak cara untuk menyusun 9 buah kelereng tersebut secara berdampingan?

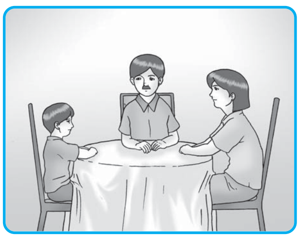
4. Berapa banyak bilangan 10 angka yang dapat dibentuk dari angka–angka 4, 3, 3, 2, 4, 4, 4, 2, 3, 3?
5. Sebuah kotak berisi 5 buah bola yang dapat diambil satu per satu secara berurutan (pengambilan tanpa pengembalian). Berapa banyak pasangan warna yang dapat terjadi jika terambil 2 bola hitam dan 3 bola putih?

3. Permutasi Siklis

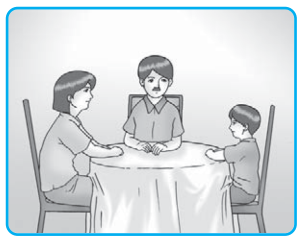
Pernahkah Anda makan malam bersama di restoran? Misalkan, pada saat masuk restoran ternyata satu meja digunakan untuk 3 orang. Bila meja berbentuk lingkaran, maka bagaimana cara Anda mengatur tempat duduknya?

Perhatikan gambar berikut ini!

Tempat duduk untuk tiga orang dapat diatur sebagai berikut.



Gambar 2.2



Gambar 2.3

Dari gambar di atas, terdapat dua susunan tempat duduk yang dapat ditempati.

Jadi, permutasi siklis yang dapat dibuat adalah:

$P = (3 - 1)! = 2! = 2 \times 1 = 2$

Dari contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

Banyak permutasi siklis dari n unsur ditentukan dengan:

$P = (n - 1)!$

Latihan 5

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Hitunglah banyak permutasi siklis, jika unsur–unsur yang tersedia:
   a. 5 unsur yang berlainan.
   b. 8 unsur yang berlainan.
   c. 10 unsur yang berlainan.
2. Suatu pertemuan dihadiri oleh 12 orang yang duduk dengan posisi melingkar. Berapa banyak cara duduk yang mungkin?
3. Delapan orang yaitu empat laki–laki dan empat perempuan duduk mengelilingi meja bundar. Ada berapa macam cara posisi duduk yang dapat dilakukan?
4. Gambarkan posisi duduk yang mungkin bila terdapat 4 orang yang sedang melakukan rapat pertemuan dengan mengelilingi meja bundar?
5. Diketahui permutasi siklis suatu percobaan adalah 120. Berapakah unsur yang disediakan?

C. Kombinasi

Sebuah SMA favorit sedang mengadakan seleksi bagi siwa kelas XI program IPS yang akan diikutsertakan dalam lomba Olimpiade Matematika Tingkat Nasional. Guru pembimbingnya berusaha memilih dua siswa terbaik dari empat siswa yang dicalonkan. Ada berapa susunan siswa yang mungkin dapat dibentuk?

Misalkan keempat siswa tersebut berinisial A, B, C, dan D. Dengan menggunakan permutasi 2 unsur dari 4 unsur yang berbeda diperoleh banyak susunan siswa yang dapat dibentuk, yaitu :

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12 \text{ susunan}$$

Susunan yang terbentuk adalah AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, dan DC. Jika diambil dua huruf tanpa memperhatikan urutannya maka susunan AB = susunan BA, demikian seterusnya sehingga diperoleh susunan, yaitu AB, AC, AD, BC, BD, dan CD.

Pilihan yang dilakukan dengan cara seperti ini disebut kombinasi 2 unsur diambil dari 3 unsur yang tersedia.

Maka, kombinasi dapat didefinisikan sebagai:

Kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia (tiap unsur berbeda) adalah suatu pilihan dari r unsur tanpa memperhatikan urutannya ($r \leq n$).

Banyak kombinasi dilambangkan dengan notasi

$$\boxed{C_r^n}$$

Untuk lebih memahaminya, perhatikan contoh berikut ini:

Contoh 2.8

Tiga huruf diambil dari huruf P,R,E,S,T,A,S, dan I. Berapa banyak cara memilih ketiga huruf itu jika urutan huruf tidak diperhatikan?

Jawab :

Banyak unsur yang tersedia $n = 8$, yaitu P, R, E, S, T, A, S dan I.

Banyak unsur yang diambil $r = 3$.

Karena urutan tidak diperhitungkan, banyak cara memilih merupakan suatu kombinasi.

Maka kombinasi 3 unsur yang diambil dari 8 unsur yang tersedia adalah

$$C_3^8 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!}$$

$$= \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)\times(5\times4\times3\times2\times1)} = 8 \times 7 = 56$$

Jadi, banyak cara memilih 3 huruf seluruhnya adalah 56 cara.

Dapat diambil kesimpulan secara umum bahwa:

Banyak kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia tanpa memperhatikan urutannya ditentukan dengan :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)}$$

Kombinasi dapat juga digunakan untuk mencari banyaknya diagonal bangun datar.

Perhatikan contoh berikut.

Banyaknya diagonal (d) segitiga dapat dihitung dengan:

$$d = C^3{}_2 - 3 = \frac{3!}{2!(3-2)!} - 3 = 3 - 3 = 0$$

Jadi, segitiga tidak mempunyai diagonal.

Dari uraian diatas, banyaknya diagonal untuk segi–n dapat ditentukan dengan:

Banyak diagonal segi–n = $d = C^n{}_2 - n$

Latihan 6

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Hitunglah kombinasi–kombinasi berikut ini!
   a. $C_2^{\ 4}$
   b. $C_3^{\ 5}$
   c. $C_5^{\ 8}$
   d. $C_4^{\ 10}$
   e. $C_8^{\ 12}$
2. Dalam suatu ruangan terdapat 7 kursi dan terdapat 11 orang yang akan menempati kursi tersebut. Satu kursi hanya boleh ditempati satu orang saja. Bila urutannya tidak diperhatikan, berapa banyak cara untuk duduk di kursi itu ?
3. Sekelompok remaja terdiri dari 15 putra dan 10 putri akan dipilih 4 orang putra dan 2 orang putri sebagai pengurus karang taruna. Tentukan banyaknya cara pemilihan tersebut!
4. Kelas XI program IPS dalam suatu SMU terdiri 40 siswa, 26 siswa di antaranya adalah putra. Dipilih 3 orang sebagai pengibar bendera dengan ketentuan pembawa bendera, selalu putri dan 2 anak yang lain putra. Berapa banyak cara pemilihan tersebut?
5. Tentukan nilai n dari kombinasi berikut!
   a. $C_5^{n+2} = 2C_4^{n+1}$, untuk $n > 5$
   b. $9C_1^{n} = 9C_8^{n+2}$, untuk $n > 8$
   c. $C_{2n-6}^{2n-4} = 105$, untuk $x > 3$.

Tugas Kelompok

Kerjakan dengan kelompok Anda!

1. Buatlah sebuah kelompok masing–masing terdiri dari empat orang, kemudian selesaikan permasalahan berikut ini.
   a. Kombinasi digunakan dalam banyak hal, salah satunya adalah teorema Binomial Newton. Pada teorema ini, kombinasi digunakan untuk menentukan koefisien dari suatu pemangkatan yang dinyatakan dalam:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$$

b. Apabila n adalah bilangan asli maka hasilnya dapat disusun dalam segitiga Pascal.

2. Carilah informasi dari buku atau internet tentang teorema Binomial Newton kemudian jawablah pertanyaan berikut ini!
   a. Siapakah ilmuwan yang mengemukakan teorema Binomial Newton?
   b. Tuliskan bentuk segitiga Pascal untuk bilangan asli dari $n = 1$ sampai $n = 10$!
   c. Jabarkan binom dari $(a + b)^{10}$!

D. Ruang Sampel dan Kejadian

1. Ruang Sampel

Sebelum pertandingan bola voli dimulai, biasanya wasit mengadakan pengundian dengan cara melempar sekeping koin atau uang logam. Setiap kapten tim harus memilih salah satu sisi mata uang, yaitu angka (A) atau gambar (G). Apabila hasil undian sesuai dengan hasil pilihan kapten tim, maka tim tersebut dapat memilih posisi atau menendang bola.

Kegiatan melempar mata uang logam tersebut termasuk suatu kejadian. Pada pelemparan mata uang logam, kejadian yang mungkin adalah muncul angka (A) atau gambar (G). Jika dinyatakan dengan notasi himpunan, misalnya S, maka diperoleh $S = \{A, G\}$. Himpunan tersebut dinamakan ruang sampel, sedangkan titik A dan G dinamakan titik sampel. Banyaknya anggota ruang sampel, $n(S) = 2$.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa:

Ruang sampel adalah himpunan semua kejadian yang mungkin diperoleh dari suatu percobaan, dinotasikan dengan S.

Titik sampel adalah setiap anggota ruang sampel atau kejadian yang mungkin.

Banyaknya anggota ruang sampel dinotasikan dengan $n(S)$.

Untuk lebih memahami ruang sampel dan titik sampel, simaklah contoh berikut!

Contoh 2.9

Tentukan ruang sampel, titik sampel, dan banyak anggota ruang sampel dari pelemparan sebuah dadu!

Jawab:
Dadu biasanya berbentuk kubus dengan 6 sisi sehingga kejadian yang mungkin dari pelemparan sebuah dadu adalah munculnya mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, atau 6. Dengan demikian, diperoleh:

Ruang sampel, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Titik sampelnya adalah 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.

Banyak anggota ruang sampel, $n(S) = 6$.

Bagaimanakah cara menentukan ruang sampel? Untuk mengetahuinya, simaklah beberapa contoh berikut ini.

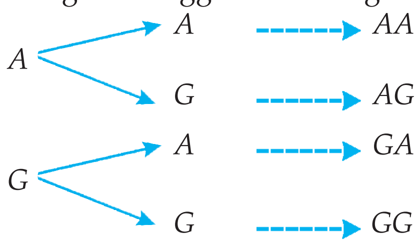
Contoh 2.10

Tentukan ruang sampel pada percobaan pelemparan dua buah mata uang sebanyak satu kali!

Jawab:

a. Dengan cara mendaftar ruang sampel
$S = \{AA, AG, GA, GG\}$

b. Dengan menggunakan diagram pohon



c. Dengan cara membuat tabel

Tabel 2.2

I \ II	*A*	*G*
A	*AA*	*AG*
G	*GA*	*GG*

Dari tabel di atas diperoleh ruang sampel $S = \{AA, AG, GA, GG\}$.
Berdasarkan contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

> Ruang sampel dapat ditentukan dengan cara:
> a. mendaftar;
> b. diagram pohon; dan
> c. tabel

2. Kejadian

Coba Anda ingat kembali pada percobaan pelemparan dadu bersisi enam. Ruang sampel pada percobaan ini adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Apabila timbul suatu pertanyaan, carilah kejadian munculnya mata dadu bilangan ganjil! Kejadian munculnya mata dadu bilangan ganjil, misalnya A, adalah $A = \{1, 3, 5\}$. Himpunan tersebut dinamakan kejadian (*event*). Dapat disimpulkan bahwa:

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel (S).

Kejadian dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu kejadian sederhana atau kejadian elementer dan kejadian majemuk. Untuk lebih jelasnya, simaklah contoh berikut ini.

Contoh 2.11

a. Pada pelemparan sebuah dadu berisi enam, kejadian–kejadian sederhana adalah
   {1}, yaitu kejadian munculnya mata dadu 1.
   {2}, yaitu kejadian munculnya mata dadu 2.
   {3}, yaitu kejadian munculnya mata dadu lebih dari 3.
b. Pada pelemparan sebuah dadu berisi enam, kejadian–kejadian majemuk adalah
   {1, 2}, yaitu kejadian munculnya mata dadu kurang dari 3.
   {2, 4, 6}, yaitu kejadian munculnya mata dadu genap.
   {3, 4, 5, 6}, yaitu kejadian munculnya mata dadu lebih dari 2.

Berdasarkan contoh di atas, dapat dinyatakan bahwa

Kejadian sederhana/elementer adalah suatu kejadian yang hanya mempunyai satu titik sampel.

Kejadian majemuk adalah suatu kejadian yang mempunyai titik sampel lebih dari satu.

Latihan 7

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tiga keping mata uang logam dilemparkan secara bersamaan.
   a. Tentukan ruang sampel dalam bentuk pasangan berurutan atau cara mendaftar!
   b. Gambarkan digram pohon dari pelmparan itu!
   c. Berapakah banyak titik sampelnya?

2. Sekeping mata uang logam dan sebuah dadu berisi enam dilemparkan secara bersamaan. Hasil yang mungkin muncul pada percobaan ini ditulis dalam bentuk pasangan berurutan.
   a. Gambarkan tabel untuk menentukan ruang sampelnya!
   b. Berapa banyak anggota ruang sampelnya!
   c. Tulislah kejadian munculnya sisi gambar untuk mata uang dan angka prima untuk dadu!
3. Dua buah dadu berisi enam dilemparkan secara bersamaan.
   a. Tentukan ruang sampelnya dengan menggunakan tabel!
   b. Berapakah banyak anggota ruang sampelnya?
   c. Tulislah kejadian munculnya angka dari kedua dadu sama!
   d. Tulislah kejadian munculnya jumlah angka kedua dadu kurang dari 6!

E. Peluang Suatu Kejadian

1. Definisi Peluang Suatu Kejadian

Pada subbab sebelumnya, Anda telah mempelajari tentang ruang sampel dari suatu kejadian. Pada pembahasan ini, Anda akan mempelajari tentang peluang suatu kejadian. Bagaimanakah cara menentukan peluang suatu kejadian dalam ruang sampel? Untuk memahaminya, perhatikan contoh berikut ini.

Sebuah perusahaan sedang membuka lowongan pekerjaan sebagai manager marketing. Apabila karyawan yang akan diterima hanya satu orang, maka berapa peluang diterimanya pelamar wanita?

Jika lowongan pekerjaan tersebut terbuka baik untuk pelamar pria maupun pelamar wanita, banyaknya anggota ruang sampel n(S) = 2, yaitu pria (P) dan wanita (W). Karena setiap pelamar pria dan wanita mempunyai peluang yang sama untuk diterima, maka peluang diterimanya pelamar wanita adalah setengah. Begitu juga peluang diterimanya pelamar pria, yaitu setengah. Dapat dituliskan sebagai $P(W) = \frac{1}{2}$ dan $P(P) = \frac{1}{2}$.

Berdasarkan contoh di atas, secara umum peluang terjadinya suatu kejadian dapat dinyatakan sebagai:

Jika setiap anggota ruang sampel (S) mempunyai kesempatan yang sama untuk muncul, maka peluang munculnya kejadian A dalam ruang sampel S adalah

$$P\ (A) = \frac{n(A)}{n(S)} \text{ dengan } n(S) \neq 0$$

dimana $P(A)$: peluang kejadian A

$n(A)$: banyaknya anggota kejadian A

$n(S)$: banyaknya anggota ruang sampel.

2. Kisaran Peluang

Pada saat pelemparan sebuah dadu berisi enam, mata dadu yang mungkin muncul adalah 1,2, 3, 4, 5, dan 6. Misalnya P(A) adalah peluang munculnya semua mata dadu, diperoleh

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$$

Dari pelemparan dadu itu, berapakah peluang munculnya angka 7? Misalnya B adalah kejadian munculnya dadu angka 7. Karena tidak mungkin muncul mata dadu 7, maka diperoleh peluang munculnya dadu angka 7 adalah:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$$

Dari uraian di atas, secara umum dapat dikatakan bahwa

Jika kejadian A dalam ruang sampel S selalu terjadi, maka diperoleh $n(A) = n(S)$ sehingga $P(A) = 1$.

Jika kejadian A dalam ruang sampel S tidak pernah terjadi, maka $n(A) = 0$ sehingga peluangnya $P(A) = 0$. Oleh karena itu, nilai peluang terbatas pada $0 \leq P(\mathrm{A}) \leq 1$.

3. Frekuensi Harapan suatu Kejadian

Dalam sebuah pelemparan dadu sebanyak satu kali, peluang munculnya angka 1 adalah $P(1) = \frac{1}{6}$. Apabila dadu tersebut dilemparkan sebanyak 60 kali, berapa kemungkinan muncul mata dadu 1?

Kemungkinannya adalah $\frac{1}{6} \times 60 = 10$ kali. Hal ini berarti bahwa pasti 10 kali muncul mata dadu 1 dalam 60 kali pelemparan. Banyaknya kemunculan atau kejadian yang diharapkan dalam suatu percobaan tersebut dinamakan frekuensi harapan.

Secara umum dapat didefinisikan bahwa:

Fungsi harapan untuk suatu kejadian A pada suatu percobaan yang dilakukan n kali dinyatakan sebagai

$$F_h = n \times P(A)$$

dimana F_h : frekuensi harapan kejadian A

$P(A)$: peluang kejadian A

Latihan 8

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tiga keping uang dilemparkan bersama–sama sebanyak satu kali. Hitunglah peluang dari kejadian–kejadian di bawah ini!
   a. Kejadian munculnya tiga sisi gambar.
   b. Kejadian munculnya dua sisi gambar dan satu sisi angka.
   c. Kejadian munculnya paling banyak satu sisi angka.
2. Dua buah dadu dilempar secara bersamaan. Tentukan peluang kejadian–kejadian di bawah ini!
   a. Kejadian munculnya mata dadu berjumlah 8.
   b. Kejadian munculnya mata dadu bilangan prima.
   c. Kejadian munculnya mata dadu berjumlah lebih dari 4.
3. Seperangkat kartu bridge tanpa joker diambil empat kartu secara acak. Berapakah peluang kejadian–kejadian di bawah ini!
   a. Kejadian terambilnya 4 kartu bernomor 10.
   b. Kejadian terambilnya 2 kartu King dan 2 kartu Queen.
   c. Kejadian terambilnya 4 kartu bernomor 7 warna merah.
4. Sebuah kantong berisi 8 bola merah, 7 bola kuning, dan 15 bola hijau. Sebuah bola diambil secara acak dari dalam kantong.
   a. Tentukan peluang terambilnya bola berwarna merah!
   b. Jika pada pengambilan pertama yang terambil bola hijau dan tidak dikembalikan lagi, berapa peluang terambilnya bola hijau

pada pengambilan bola kedua?

c. Jika percobaan diteruskan sebanyak 300 kali pengambilan dengan pengembalian bola, berapa frekuensi harapan terambil bola kuning?

5. Peluang seorang penembak akan menembak tepat mengenai sasaran adalah 0,69. Jika ada 100 orang penembak, berapa orang yang diperkirakan menembak tepat pada sasaran tembak?

Tugas Individu

Kerjakan di buku tugas Anda!

Bukalah kembali nilai raport di kelas X untuk semester 1 dan 2 Anda. Hitunglah nilai rata–rata untuk masing–masing mata pelajaran semester 1 dan 2. Dari hasil nilai rata–rata tersebut, tentukan peluang nilai dari masing–masing pelajaran. Mata pelajaran apakah yang mempunyai peluang terbesar?

F. Kejadian Majemuk

Jika beberapa kejadian–kejadian dasar dihubungkan, maka kejadian–kejadian majemuk yang meliputi komplemen, gabungan, dan irisan dapat dibentuk.

1. Peluang Komplemen Suatu Kejadian

Untuk memahami pengertian komplemen suatu kejadian, simaklah percobaan berikut ini.

Setumpuk kartu yang berjumlah 8 kartu diambil sebuah kartu secara acak. Ruang sampelnya adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Jika kejadian terambilnya kartu bernomor ganjil dinyatakan dengan A, yaitu $A = \{1, 3, 5, 7\}$, maka kejadian terambilnya kartu bukan bernomor ganjil dinyatakan dengan A^c yaitu $A^c = \{2, 4, 6, 8\}$. Kejadian terambilnya kartu bukan bernomor ganjil disebut komplemen dari kejadian terambilnya kartu bernomor ganjil. Dapat disimpulkan bahwa:

Komplemen suatu kejadian A adalah kejadian dari tidak terjadinya kejadian A.

Bila Anda perhatikan percobaan di atas, himpunan komplemen suatu kejadian A adalah himpunan anggota S yang tidak termasuk himpunan A yang dinyatakan dengan $A^c = S - A$. Sehingga peluang A^c dapat dihitung

dengan $P(A^c) = \dfrac{n(A^c)}{n(s)}$

Hubungan antara A, komplemen A, dan S adalah:

$$A + A^c = S$$
$$n(A) + (A^c) = n(S)$$
$$P(A) + P(A^c) = 1$$

Dapat disimpulkan bahwa:

Jika A^c adalah komplemen dari A, maka peluang kejadian A^c ditentukan dengan

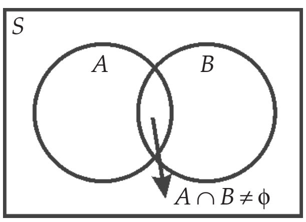
$P(A^c) = 1 - P(A)$

dimana $P(A)$ = peluang kejadian A

$P(A^c)$ = peluang komplemen kejadian A

2. Peluang Gabungan Dua Kejadian

Perhatikan diagram venn berikut ini.



Gambar 2.4

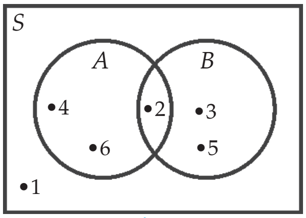
Diagram venn di atas menunjukkan suatu kejadian A dan B yang tidak saling lepas (*non mutually exclusive event*). $A \cap B$ (dibaca A irisan B) menyatakan bahwa ada anggota A yang juga merupakan anggota B. Sedangkan $A \cup B$ (dibaca A gabungan B) menyatakan gabungan antara anggota A dan B.

Bagaimanakah cara menentukan peluang untuk kejadian tidak saling lepas? Untuk mengetahuinya perhatikan contoh berikut!

Contoh 2.12

Sebuah dadu dilemparkan sekali. Jika A adalah kejadian munculnya mata dadu genap dan B adalah kejadian muncul mata dadu prima, berapa peluang kejadian munculnya mata dadu genap atau prima?

Jawab:
Kejadian muncul mata dadu genap adalah $A = \{2, 4, 6\}$, $n(A) = 3$.
Kejadian muncul mata dadu prima adalah $B = \{2, 3, 5\}$, $n(B) = 3$.
Kejadian muncul mata dadu genap atau prima adalah $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(A \cup B) = 5$.
Kejadian muncul mata dadu genap dan prima adalah $A \cap B = \{2\}$, $n(A \cap B) = 1$.



Gambar 2.5

Banyak anggota dalam anggota $A \cup B$ adalah
$n(A \cup B) \quad = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(A)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\text{diperoleh } P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{6-1}{6}$$
$$= \frac{5}{6}$$

Jadi, peluang kejadian muncul mata dadu genap atau prima adalah $\frac{5}{6}$.

Dari contoh di atas, dapat didefinisikan bahwa:

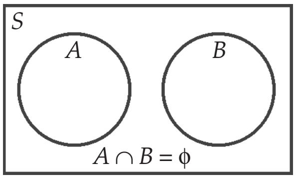
Jika A dan B adalah dua kejadian yang tidak saling lepas berada dalam ruang sampel S, maka peluang kejadian $A \cup B$ ditentukan dengan

$$\mathrm{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

dimana $\mathrm{P}(A \cup B)$: peluang gabungan kejadian A dan B
$P(A)$: peluang kejadian A
$P(B)$: peluang kejadian B
$P(A \cap B)$: peluang irisan keadian A dan B

3. Peluang Gabungan Kejadian yang Saling Lepas

Perhatikan diagram venn berikut ini.



Gambar 2.6

Diagram venn di atas menunjukkan kejadian A dan B yang saling lepas (*mutually exclusive*). Dua kejadian tersebut saling lepas bila tidak ada irisan antara keduanya, maka $P(A \cap B) = \phi$. Bagaimana cara menentukan peluang suatu kejadian yang saling lepas? Simaklah contoh berikut ini!

Contoh 2.13

Pada pelemparan sebuah dadu sebanyak satu kali, A adalah kejadian munculnya mata dadu <3, dan B adalah kejadian munculnya mata dadu ≥ 4. Carilah peluang kejadian munculnya mata dadu < 3 atau ≥ 4!

Jawab:

Misal S : ruang sampel

A : kejadian munculnya mata dadu < 3.

B : kejadian munculnya mata dadu $\geq 4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(S) = 6$

$A = \{1, 2\}, \quad n(A) = 2, \quad P(A) = \frac{2}{6}$

$B = \{4, 5, 6\}, n(B) = 3, \quad P(B) = \frac{3}{6}$

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{\ \}, n(A \cap B) = 0, P(A \cap B) = 0 \\
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - 0 \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Jadi, peluang kejadian munculnya mata dadu < 3 atau mata dadu ≥ 4 adalah $\frac{5}{6}$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa:

> Jika A dan B adalah dua kejadian yang saling lepas, maka peluang gabungan dua kejadian tersebut ditentukan dengan:
> $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Latihan 9

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Sebuah kantong berisi 8 kelereng merah, 7 kelereng putih, dan 5 kelereng hijau. Sebuah kelereng diambil secara acak. Berapakah peluang terambilnya:
   a. kelereng bukan hijau;
   b. kelereng bukan putih?
2. Sebuah dadu bersisi enam dilempar sekali. Tentukan peluang munculnya kejadian–kejadian berikut!
   a. Bilangan ≥ 2 atau bilangan ≤ 5.
   b. Bilangan ganjil atau bilangan genap.
3. Sebuah kartu dipilih dalam suatu permainan kartu bridge tanpa joker. Buktikan bahwa peluang terpilihnya satu kartu berwarna hitam atau satu kartu Jack adalah $\frac{7}{13}$!
4. Dua buah dadu dilempar secara bersamaan sebanyak satu kali. Hitunglah peluang munculnya jumlah kedua mata dadu:
   a. 2 atau 8;
   b. 8 atau 10 atau 12!
5. Dari 12 orang siswa yang terdiri dari 7 orang siswa laki–laki dan 5 orang siswa perempuan akan dibentuk sebuah tim cerdas cermat yang terdiri dari 3 orang. Berapa peluang terbentuknya sebuah tim yang terdiri dari ketiganya bukan siswa laki–laki?

4. Peluang Gabungan Kejadian yang Saling Bebas

Dua kejadian yang saling bebas artinya kejadian yang satu tidak mempengaruhi kejadian yang lain, atau kejadian yang satu tidak bergantung dengan kejadian yang lain. Untuk lebih memahaminya, simaklah contoh berikut ini.

Contoh 2.14

Sekeping mata uang dan sebuah dadu dilempar secara bersamaan sebanyak satu kali. Berapa peluang munculnya angka pada mata uang dan bilangan genap pada mata dadu?

Jawab:

Misal C : kejadian munculnya angka
D : kejadian munculnya bilangan genap
Sc : ruang sampel mata uang
Sd : ruang sampel mata dadu

$C = \{A\}, n(C) = 1$

$Sc = \{A, G\}, n(Sc) = 2$

$P(C) = \dfrac{n(C)}{n(Sc)} = \dfrac{1}{2}$

$D = \{2, 4, 6\}, n(D) = 3$

$Sd = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, n(Sd) = 6$

$P(D) = \dfrac{n(D)}{n(Sd)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
P(C \cap D) &= P(C) \times P(D) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Info Matematika

Peluang mulai dikenal dan dikembangkan pada permulaan abad ke-17. Bermula dari seorang penjudi bangsawan Perancis bernama Chevalier de Mere yang meminta bantuan kepada Blaise Pascal (1623-1662) untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan permainan dadu. Blaise Pascal bersama-sama dengan Piere de Fermat (1901-1665) mencoba menyelesaikan masalah permainan dadu tersebut. Dari penyelesaian itu, lahirlah sebuah cabang matematika baru yang dikenal dengan teori peluang.

Atau dengan cara lain

Untuk menentukan ruang sampelnya, dapat digunakan tabel berikut ini.

Tabel 2.3

Mata uang / Mata dadu	1	2	3	4	5	6
A	$(A, 1)$	$(A, 2)$	$(A, 3)$	$(A, 4)$	$(A, 5)$	$(A, 6)$
G	$(G, 1)$	$(G, 2)$	$(G, 3)$	$(G, 4)$	$(G, 5)$	$(G, 6)$

Banyak anggota ruang sampel, $n(S) = 12$.

Sehingga $C \cap D = \dfrac{n(C \cap D)}{n(S)} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

Jadi, peluang munculnya angka pada mata uang dan bilangan genap pada mata dadu adalah 0,25.

Berdasarkan contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

Kejadian C dan D disebut dua kejadian yang saling bebas jika kejadian C tidak terpengaruh oleh kejadian D atau kejadian D tidak terpengaruh oleh kejadian C.

Peluang antara dua kejadian saling bebas dapat ditentukan dengan:

Jika kejadian C dan kejadian D saling bebas maka berlaku

$P(C \cap D) = P(C) \times P(D)$

dimana $P(C \cap D)$: peluang irisan kejadian C dan D

$P(C)$: peluang kejadian C

$P(D)$: peluang kejadian D

Jika $P(C \cap D) \neq P(C) \times P(D)$, maka kejadian C dan D tidak saling bebas.

5. Peluang Kejadian Bersyarat

Pengertian kejadian bersyarat dapat Anda pahami melalui percobaan berikut. Misalkan pada percobaan melempar dadu bersisi enam sebanyak satu kali, akan ditentukan kejadian munculnya mata dadu angka ganjil jika disyaratkan kejadian munculnya mata dadu angka prima terlebih dulu.

Mula–mula ruang sampelnya adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dengan syarat bahwa kejadian munculnya mata dadu angka prima terjadi dulu, ruang sampelnya menjadi $\{2, 3, 5\}$. Dalam ruang sampel yang baru tersebut, kejadian munculnya mata dadu angka ganjil adalah $\{3, 5\}$. Kejadian ini disebut kejadian bersyarat. Secara umum dapat dinyatakan bahwa:

> Kejadian bersyarat adalah kejadian munculnya suatu kejadian A jika disyaratkan kejadian munculnya kejadian B terlebih dahulu.

Dari contoh percobaan di atas, kejadian A dengan syarat kejadian B terjadi terlebih dahulu dapat ditulis $A \mid B$. Sebaliknya, jika kejadian B dengan syarat kejadian A terjadi lebih dulu, maka ditulis $B \mid A$.

Bagaimana cara menghitung peluang kejadian bersyarat? Untuk mengetahuinya, simaklah penjelasan berikut.

a. Dalam ruang sampel mula–mula $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dengan $n(S) = 6$. Diketahui kejadian munculnya mata dadu angka ganjil, misal A, adalah $\{1, 3, 5\}$ dengan $n(A) = 3$ maka $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{6}$.

   Kejadian munculnya mata dadu angka prima, misal B adalah $\{2, 3, 5\}$ dengan $n(B) = 3$ maka $P(B) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{6}$.

b. Diperoleh ruang sampel yang baru, $B = \{2, 3, 5\}$ dengan $n(B) = 3$ Kejadian bersyarat $A \mid B = \{3, 5\}$ maka $n(A \mid B) = 2$. Peluang kejadian bersyarat $A \mid B$ adalah:

   $$P\,(A \mid B) = \frac{n(A \mid B)}{n(S)} = \frac{2}{3}$$

c. Dari hasil–hasil perhitungan di atas dapat diketahui bahwa:

   $P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B)$

   $$\frac{2}{6} = \frac{3}{6} \times \frac{2}{3}$$

Berdasarkan uraian percobaan di atas, secara umum dapat disimpulkan bahwa:

Peluang kejadian A dengan syarat kejadian B terjadi terlebih dulu ditentukan oleh $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ dengan $P(B) \neq 0$.

Peluang kejadian B dengan syarat kejadian A terjadi terlebih dulu ditentukan dengan $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ dengan $P(A) \neq 0$.

Latihan 10

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Selidiki apakah A dan B merupakan kejadian yang saling bebas!
   a. Sebuah dadu dilemparkan sebanyak satu kali.
      A : kejadian muncul bilangan lebih dari dua
      B : kejadian bilangan ganjil
   b. Sebuah mata uang dan sebuah dadu dilemparkan sebanyak satu kali.
      A : kejadian bilangan lebih dari 4.
      B : kejadian muncul angka
2. Dalam sebuah kotak berisi 10 bola hitam dan 5 bola putih. Dari dalam kotak diambil satu bola berturut–turut dua kali tanpa pengembalian. Tentukan peluang terambil bola pertama hitam dan bola kedua berwarna putih!
3. Peluang seorang pria untuk dapat hidup sampai 60 tahun lagi adalah 0,8. Sedangkan peluang seorang wanita untuk dapat hidup sampai 60 tahun lagi adalah 0,85. Berapakah peluang keduanya dapat hidup sampai 60 tahun?
4. Tiga keping mata uang logam dilempar secara bersamaan sebanyak satu kali. A adalah kejadian munculnya sekurang–kurangnya dua sisi gambar. B adalah kejadian munculnya mata uang pertama sisi gambar. Hitunglah peluang–peluang berikut!
   a. $P(A \cap B)$
   b. $P(A|B)$
   c. $P(B|A)$
5. Sebuah kantong berisi 5 kelereng merah, 3 kelereng putih, dan 2 kelereng hijau. Jika dari dalam kantong diambil dua kelereng sekaligus, tentukan peluang terambil kelereng itu berwarna merah dan yang lain berwarna hijau!

1. Aturan pengisian tempat (*filling slots*) atau aturan perkalian
   Banyak cara untuk mengisi n tempat yang tersedia secara keseluruhan $k_1 \times k_2 \times ... \times k_n$
2. Faktorial dari n bilangan asli atau bilangan bulat positif:
   $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$
   notasi $n!$ dibaca sebagai n faktorial.
3. Permutasi dari unsur–unsur yang berbeda
   a. Permutasi unsur yang diambil dari n unsur yang berbeda adalah susunan dari r unsur itu dalam suatu urutan ($r \leq n$).
   b. Banyak permutasi: $nPr = P(n,r) = {}^nP_r = P_r^n$
      Bila $r = n$ maka $nPn = P(n,n) = {}^nP_n = P_n^n$
   c. Banyak permutasi n unsur
      $P_r^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 = n!$
   d. Banyak permutasi r yang diambil dari n unsur yang berbeda ($r \leq n$)

      $P_r^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
4. Jika dari n unsur yang tersedia terdapat k dan m unsur yang sama, maka banyak permutasi dari n unsur tersebut adalah $P = \dfrac{n!}{k!m!}$.
5. Banyak permutasi siklis dari n unsur ditentukan dengan $P = (n-1)!$
6. Banyak kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia tanpa memperhatikan urutannya

   $C_r^n = \dfrac{r!}{r!(n-r)!}$
7. Jika setiap anggota ruang sampel S mempunyai kesempatan yang sama untuk muncul, maka peluang munculnya kejadian A dalam ruang sampel S adalah $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$ dengan $n(S) \neq 0$, dengan
   $P(A)$: peluang kejadian A, $n(A)$: banyaknya anggota kejadian A, $n(S)$: banyaknya anggota ruang sampel.

8. Nilai peluang terbatas pada pada $0 \leq P(A) \leq 1$.
9. Frekuensi harapan untuk suatu kejadian A pada suatu percobaan yang dilakukan n kali dinyatakan: $F_h = n \times P(A)$, dengan F_h : frekuensi harapan kejadian A, $P(A)$: peluang kejadian A.
10. Jika A^c adalah komplemen dari A, maka peluang kejadian A^c ditentukan oleh $P(A^c) = 1 - P(A)$, dengan $P(A)$: peluang kejadian A, $P(A^c)$: peluang komplemen kejadian A.
11. Jika A dan B adalah dua kejadian yang tidak saling lepas berada dalam ruang sampel S, maka peluang gabungan dua kejadian ditentukan oleh $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, dengan $P(A \cup B)$: peluang gabungan kejadian A dan B, $P(A)$: peluang kejadian A, $P(B)$: peluang kejadian B, $P(A \cup B)$: peluang irisan keadian A dan B.
12. Jika A dan B adalah dua kejadian yang saling lepas, maka peluang gabungan dua kejadian tersebut ditentukan dengan $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
13. Kejadian C dan kejadian D disebut dua kejadian yang saling bebas jika kejadian C tidak terpengaruh oleh kejadian D atau kejadian D tidak terpengaruh oleh kejadian C.

    Jika kejadian C dan kejadian D saling bebas, maka berlaku $P(C \cap D) = P(C) \times P(D)$, dengan $P(C \cap D)$: peluang irisan kejadian C dan D, $P(C)$: peluang kejadian C, $P(D)$: peluang kejadian D.

    Jika $P(C \cap D) \neq P(C) \times P(D)$, maka kejadian C dan D tidak saling bebas.

Uji Kompetensi

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar!

1. Sebuah organisasi terdiri dari 8 anggota putra dan 7 anggota putri. Akan dipilih dua orang pengurus yang terdiri dari satu orang anggota putra dan satu orang anggota putri. Berapa banyak cara untuk memilih susunan pengurus dalam organisasi itu?
2. Tentukan nilai dari:
   a. $11!$
   b. $2! + 5!$
   c. $\dfrac{75!}{73!}$

d. $3!\ 7!$

e. $\dfrac{19!}{4!15!}$

3. Hitunglah tiap permutasi berikut!

a. P_2^{10}

b. P_4^{18}

c. P_5^{40}

d. ${}_{14}P_7$

e. ${}_{90}P_5$

4. Tentukan nilai n yang memenuhi persamaan berikut!

a. $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56$

b. $4!\ (n + 2)! = 3(n + 3)!$

c. $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 270$

d. $P_{n+2}^{n+4} = 360$

e. ${}_{(n + 5)}P_{(n + 3)} = 2.520$

5. Berapa banyak susunan huruf berbeda yang dapat disusun dari kata STATISTIKA!

6. Pada suatu pembubaran panitia reuni SMU yang dihadiri 10 orang, acara terakhir diisi dengan acara menyanyi bersama dengan bergandengan tangan melingkar. Berapa banyak cara penyusunan urutannya?

7. Tentukan nilai x dari $P_2^x = \dfrac{4}{3}x + P_1^2$!

8. Sebuah kantong berisi 10 kelereng biru dan 8 kelereng kuning. Lima kelereng diambil sekaligus secara acak. Berapa banyaknya cara pengambilan kelereng jika kelereng yang terambil adalah:

a. Lima kelereng biru.

b. Tiga kelereng biru dan dua kelereng putih.

c. Kelereng dengan warna sembarang.

9. Carilah nilai n apabila diketahui $C_3^{n+1} = 4\ C_2^n$!

10. Empat keping mata uang logam dilemparkan secara bersamaan.
    a. Tentukan ruang sampelnya dalam tabel!
    b. Gambarkan diagram pohon dari pelemparan itu!
    c. Berapa banyak anggota ruang sampelnya!
11. Sebuah kotak berisi 8 bola merah, 7 bola putih, dan 15 bola kuning. Sebuah kelereng diambil secara acak dari dalam kotak tersebut kemudian kelereng tersebut dikembalikan lagi. Jika percobaan diteruskan sampai 300 kali pengambilan, berapa kali harapan terambilnya bola berikut?
    a. Bola putih.
    b. Bola bukan putih.
12. Dari 100 siswa, 30 orang gemar matematika, 20 orang gemar ekonomi, dan 10 orang gemar keduanya. Jika seorang siswa dipilih secara acak, tentukan peluang siswa tersebut gemar matematika atau ekonomi!
13. Dua buah dadu berisi enam dilempar secara bersamaan sebanyak satu kali. Hitunglah peluang kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu 5 atau 10!
14. Peluang kejadian A adalah $P(A) = \frac{1}{3}$, peluang kejadian B adalah $P(B) = \frac{2}{5}$, dan peluang kejadian A atau B adalah $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$. Tunjukkan bahwa kejadian A dan B adalah kejadian yang saling bebas!
15. Sebuah kotak berisi 6 kartu berwarna ungu dan 4 kartu berwarna biru. Bila diambil dua kartu satu per satu tanpa pengembalian, hitunglah peluang kejadian terambilnya:
    a. kartu pertama ungu dan kartu kedua biru;
    b. keduanya biru!

Pengayaan

Kerjakan soal–soal berikut dengan benar!

1. Dalam suatu desa terdapat 200 keluarga. Rata–rata jumlah anggota setiap keluarga adalah 6 orang dan jumlah orang dewasa seluruhnya 500 orang. Pada suatu saat, desa tersebut diserang suatu wabah penyakit dengan peluang terjangkit wabah bagi orang dewasa 0,3 dan bagi anak–anak 0,7. Berapa orang yang diperkirakan akan terjangkit wabah tersebut?
2. Dari 100 siswa yang diwawancarai, petugas survei memperoleh data sebagai berikut. Empat puluh dua siswa gemar matematika, 68 siswa gemar akuntansi, 54 siswa gemar sejarah, 22 siswa gemar matematika dan sejarah, 25 siswa gemar matematika dan akuntansi, 7 siswa gemar sejarah tetapi tidak gemar matematika dan akuntansi, 10 siswa gemar ketiga–ketiganya, dan 8 orang tidak gemar ketiga–tiganya.
   a. Gambarlah diagram venn dari data di atas.
   b. Jika diambil seorang siswa secara acak, maka tentukan peluang siswa itu hanya gemar matematika.
3. Sebuah mobil yang diuji mempunyai kemungkinan gagal dalam uji coba karena lampu $\frac{1}{4}$, karena setir $\frac{1}{3}$, dan karena rem $\frac{1}{2}$. Berapakah peluang mobil itu dapat lulus?
4. Pecatur P dan Q bertarung dalam 12 ronde dimana P menang 6 ronde, B menang 4 ronde, sedangkan yang dua ronde draw. Panitia akan memainkan lagi sebanyak 3 ronde. Berdasarkan permainan sebelumnya, tentukan peluang:
   a. P memenangkan ketiga ronde itu;
   b. dua ronde dari ketiganya draw;
   c. P dan Q memenangkan ronde–ronde itu secara bergantian;
   d. Q memenangkan paling sedikit satu ronde dari ketiga ronde itu!
5. Suatu perusahaan akan memilih 3 orang sebagai kepala bagian pada perusahaannya. Dari seleksi penyisihan terdapat 7 orang yang menguasai manajemen, 5 orang yang menguasai bahasa Inggris, dan 3 orang yang menguasai akuntansi. Tentukan peluang 3 orang yang terpilih tersebut:
   a. Paling sedikit dua orang menguasai manajemen.
   b. Satu orang menguasai manajemen, satu orang menguasai bahasa Inggris, dan satu orang menguasai akuntansi.

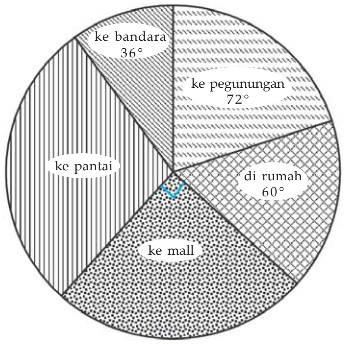
Kerjakan soal–soal di bawah ini dengan benar!

1. Nilai ulangan harian matematika dari 10 siswa yang diambil secara acak adalah 8, 4, 7, 9, 4, 7, 3, 6, 5, 7. Mean dan median data berturut–turut adalah ....
   a. 6 dan 5,5
   b. 6 dan 6,5
   c. 6,5 dan 6
   d. 6,5 dan 7
   e. 7 dan 6,5
2. Nilai kuartil ketiga (Q_3) dari data 33, 36, 39, 31, 33, 41, 35, 40, 45, 43 adalah ....
   a. 31
   b. 33
   c. 36
   d. 40
   e. 41
3. Perhatikan data nilai ujian siswa berikut.

Nilai	3	4	5	6	7	8	9
Frekuensi	3	5	12	17	14	6	3

   Seorang siswa dinyatakan lulus jika ujiannya lebih dari nilai rata–rata dikurangi satu. Banyak siswa yang lulus adalah ... siswa.
   a. 52
   b. 40
   c. 28
   d. 23
   e. 20
4. Berat badan rata–rata dari 50 orang adalah 52 kg. Jika ada seorang yang beratnya 55 kg ditukar dengan berat badannya 65 kg. Maka berat badan rata–rata sekarang adalah ....
   a. 52,2
   b. 52,3
   c. 52,5
   d. 53,3
   e. 53,5

5. Diketahui data kegiatan 600 orang pada hari libur tampak pada diagram lingkaran berikut. Banyaknya orang yang berkunjung ke pantai ... orang.



a. 60
b. 100
c. 120
d. 150
e. 170

6. Absen siswa dari suatu kelas selama satu tahun dicatat berdasarkan banyak pelajaran yang ditinggalkan.

Absen	Frekuensi
1–5	15
6–10	50
11–15	60
16–20	25
21–25	32
26–30	18

Desil ketujuh dari data tabel di atas adalah ....

a. 17,5
b. 17,9
c. 18,25
d. 18,5
e. 19

7. Diketahui data 4, 7, 9,18, 18, 19, 20, 22, 22, 22, 26, 26, 28, 29, 48. Pagar dalam dan pagar luar berturut–turut adalah ....
   a. 6 dan 38
   b. 3 dan 43
   c. 8 dan 38
   d. 10 dan 34
   e. 12 dan 32
8. Simpangan baku dari data: 1, 3, 5, 6, 7, 5, 8, 5, 6, 4 adalah ....
   a. $\sqrt{2}$
   b. 2
   c. $4\sqrt{2}$
   d. 4
   e. 2
9. Banyaknya susunan huruf berbeda yang dapat dibentuk dari huruf–huruf pada kata PRASETYA adalah ....
   a. 40.320
   b. 21.060
   c. 10.080
   d. 5.040
   e. 2.520
10. Sebuah klub basket akan menyusun tim inti dari 8 orang menjadi 5 orang. Bila urutannya tidak diperhatikan, maka banyaknya susunan yang berbeda ada ....
    a. 336
    b. 56
    c. 28
    d. 8
    e. 1
11. Jika C^n_r menyatakan banyaknya kombinasi r elemen dari n elemen dan $C^n_3 = 2n$, maka nilai C^{2n}_7 adalah ....
    a. 80
    b. 90
    c. 116
    d. 120
    e. 160
12. Dua puluh enam kartu masing–masing dibrti huruf $A, B, C, ..., Z$. Sebuah kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu itu, kemudian dikembalikan. Jika dilakukan pengambilan sebanyak 50 kali, harapan terambilnya huruf vokal adalah ....
    a. $7\frac{9}{13}$
    b. $9\frac{8}{13}$
    c. $11\frac{7}{13}$
    d. $13\frac{6}{13}$
    e. $15\frac{6}{13}$

13. Sebuah dadu dilempar sebanyak 100 kali. Hasil pelemparan tersebut muncul mata dadu bernomor 5 sebanyak 18 kali. Peluang muncul mata dadu bernomor 3 atau 5 adalah ....

a. $\frac{7}{20}$

b. $\frac{17}{100}$

c. $\frac{9}{50}$

d. $\frac{19}{50}$

e. $\frac{27}{100}$

14. Peluang seorang siswa lulus matematika adalah $\frac{2}{3}$, sedangkan peluang lulus ekonomi adalah $\frac{4}{9}$. Jika peluang lulus paling sedikit satu pelajaran adalah $\frac{4}{5}$, maka peluang lulus kedua–duanya adalah ....

a. $\frac{32}{135}$

b. $\frac{8}{27}$

c. $\frac{14}{45}$

d. $\frac{68}{135}$

e. $\frac{22}{27}$

15. Sebuah kotak berisi 5 bola hijau, 3 bola kuning, dan 2 bola putih. Bila diambil dua bola sekaligus, maka peluang terambilnya bola kuning dan hijau adalah ....

a. $\frac{3}{50}$

b. $\frac{1}{6}$

c. $\frac{1}{3}$

d. $\frac{1}{2}$

e. $\frac{47}{90}$

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan benar!

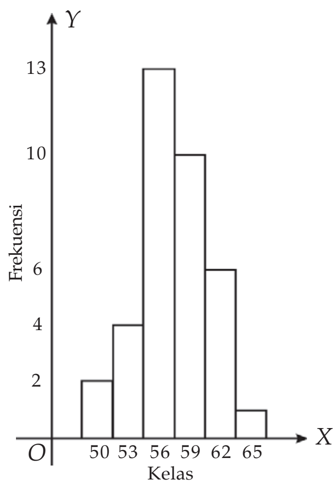
1. Data tinggi badan 30 siswa sebagai berikut.

168	159	159	161	158	155	169	163	159	157
187	162	158	159	154	158	161	158	162	159
156	161	161	163	162	188	160	187	162	168

   a. Gambarlah tabel distribusi frekuensi dari data di atas!

   b. Tentukan statistik lima serangkai!

2. Dari data yang disajikan pada histogram di bawah, tentukan:



   a. modus;

   b. median.

3. Rata–rata gaji karyawan suatu perusahaan adalah Rp250.000,00 per bulan. Rata–rata gaji karyawan pria adalah Rp260.000,00, dan rata–rata gaji karyawan wanita Rp210.000,00. Tentukan perbandingan dari banyak karyawan pria dan wanita!

4.

6,25	
5,9	6,7
5,4	7,2

   Dari susunan statistik lima serangkai di atas, tentukan:

   a. jangkauan;

   b. jangkauan antar kuartil;

   c. langkah;

   d. apakah nilai 5,0 dan 7,5 konsisten dalam kumpulan data tersebut?

5. Perhatikan tabel berikut!

Nilai	Frekuensi
30–39	1
40–49	3
50–59	11
60–69	21
70–79	43
80–89	32
90–99	9

Data pada tabel distribusi frekuensi di samping merupakan data nilai ulangan harian matematika. Tentukan:

a. simpangan rata–ratanya.

b. variansi dan simpangan bakunya.

6. Tentukan nilai dari:

a. $\frac{11!}{7!}$

b. P_5^{20}

c. C_8^{13}

7. Terdapat seperangkat kartu berjumlah 100 buah dimana setiap kartu diberi nomor 1 sampai 100. Bila diambil satu kartu secara acak, maka berapakah peluang terambilnya kartu bernomor bilangan prima?

8. Sebuah toples berisi bola–bola kecil dengan jumlah 18 bola merah, 14 bola hijau, 11 bola kuning, dan 15 bola biru. Sebuah bola diambil dari toples itu secara acak. Berapakah peluang terambilnya bola bukan merah?

9. Pada pelemparan dua mata uang dan sebuah dadu bersama–sama, tentukan peluang untuk mendapatkan pada mata uang pertama muncul angka, pada mata uang kedua muncul gambar, dan mata dadu muncul bilangan genap!

10. Berapa banyak susunan huruf yang dapat dibentuk dari huruf–huruf pada kata JUARA PERTAMA?

Bab 3
Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers

Standar Kompetensi

Menentukan komposisi dua fungsi dan invers suatu fungsi

Kompetensi Dasar

- Menentukan komposisi fungsi dari dua fungsi
- Menentukan invers suatu fungsi

Peta Konsep

- Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers
  - Fungsi
    - Pengertian Fungsi
    - Notasi Fungsi
    - Sifat–Sifat Fungsi
  - Fungsi Komposisi
    - Pengertian Fungsi Komposisi
    - Fungsi Komposisi Bilangan Real
    - Sifat Fungsi Komposisi
  - Fungsi Invers
    - Pengertian Fungsi Invers
    - Menentukan Fungsi Invers
    - Menentukan Grafik Fungsi Invers

Sumber: www.ded.co.uk

Gambar 3.1

Sebelum membahas masalah fungsi dalam matematika, coba Anda perhatikan masalah fungsi dalam kehidupan sehari–hari. Fungsi digunakan untuk menghitung atau memperkirakan sesuatu, misalnya fungsi permintaan dan penawaran barang dalam ekonomi dan juga fungsi waktu peluruhan unsur dalam kimia. Di samping itu, fungsi juga berfungsi untuk mengolah masukan (input) sehingga dapat menghasilkan suatu keluaran (output). Seperti apakah fungsi itu? Agar lebih jelas, simaklah permasalahan di bawah ini.

Pernahkah Anda menemani Ibu berbelanja ke supermarket? Bila Anda amati semua barang–barang belanjaan mempunyai label kode masing–masing. Dengan menggunakan alat "barcode" yang diarahkan pada label kode, Anda bisa mengetahui harga barang–barang tersebut. Proses apakah yang berlaku dalam barcode? Apakah fungsi tertentu berlangsung di dalamnya?

Untuk mengetahui jawaban dari permasalahan di atas, marilah kita mempelajari masalah fungsi secara detail dalam bab ini.

A. Fungsi

1. Pengertian Fungsi

Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah pemasangan atau korespondensi antara anggota–anggota A dengan anggota–anggota B. Untuk mengingat kembali tentang relasi, coba Anda perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 3.1

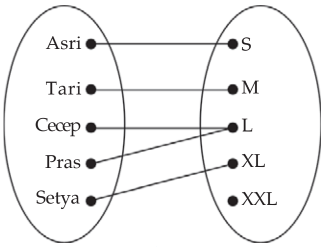
Lima siswa kelas XI program IPS di suatu sekolah ditanya mengenai ukuran baju seragam yang mereka kenakan dan hasilnya sebagai berikut.

– Asri mengenakan baju seragam berukuran S.
– Tari mengenakan baju seragam berukuran M.
– Cecep mengenakan baju seragam berukuran L.
– Pras mengenakan baju seragam berukuran L.
– Setya mengenakan baju seragam berukuran XL.

Jika kelima siswa tersebut ditunjukkan dengan himpunan A dan ukuran baju seragam ditunjukkan dengan himpunan B, maka dapat dibuat suatu hubungan antara kedua himpunan tersebut.

A = {Asri, Tari, Cecep, Pras, Setya}

B = $\{S, M, L, XL, XXL\}$



Gambar 3.2

Gambar 3.2 menunjukkan diagram panah dengan relasi "ukuran baju seragam" dari himpunan A ke himpunan B.

Relasi kedua himpunan tersebut juga dapat dinyatakan dengan pasangan berurutan, yaitu R = {(Asri, S), (Tari, M), (Cecep, L), (Pras, L), (Setya, XL)}.

Setiap siswa hanya mempunyai satu ukuran baju seragam sehingga setiap himpunan A dipasangkan tepat satu dengan anggota himpunan B. Relasi yang demikian disebut pemetaan atau fungsi.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

> Suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.

Dari pengertian di atas, syarat–syarat suatu fungsi yang memetakan himpunan A ke himpunan B adalah:

1. Setiap anggota himpunan A harus habis dipasangkan.
2. Setiap anggota himpunan A dipasangkan tepat satu dengan anggota himpunan B.

Coba Anda perhatikan kembali diagram panah pada gambar 3.2 . Pada fungsi tersebut, seluruh anggota dalam himpunan A disebut domain (daerah asal). Seluruh anggota dalam himpunan B disebut kodomain (daerah kawan). Sedangkan, anggota himpunan B yang mendapat pasangan dari anggota himpunan A disebut range (daerah hasil), sehingga diperoleh:

Domain = {Asri, Tari, Cecep, Pras, Setya}

Kodomain = $\{S, M, L, XL, XXL\}$

Range = $\{S, M, L, XL\}$

2. Notasi Fungsi

Jika f suatu fungsi yang memetakan setiap x anggota himpunan A ($X \in A$) kesatu dan hanya satu y anggota himpunan, maka dapat ditulis:

> $f : x \rightarrow y$ (dibaca : f memetakan x ke y)
> y disebut bayangan x oleh fungsi f dan dinyatakan dengan $f(x)$.

Agar Anda lebih memahami notasi fungsi, perhatikan contoh yang berkaitan dengan notasi berikut ini!

Contoh 3.2

Tentukan bayangan 5 dan –2 oleh $f : x \to 2x^2 + 1$ dengan $x \in R$!

Jawab:

Bayangan x oleh fungsi f adalah $f(x) = 2x^2 + 1$.

Untuk $x = 5 \to f(5) = 2.\ 5^2 + 1 = 50 + 1 = 51$

Untuk $x = -2 \to f -2) = 2.\ (-2)^2 + 1 = 8 + 1 = 9$

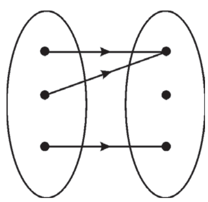
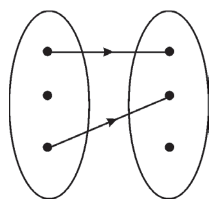
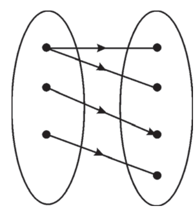
Jadi, bayangan untuk fungsi $f(x) = 2x^2 + 1$ adalah 51 dan 9.

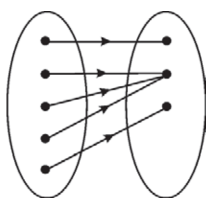
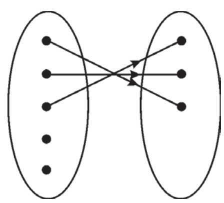
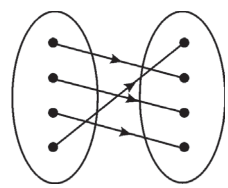
Bila hasilnya dinyatakan dalam pasangan berurutan, diperoleh relasi $R = \{(5, 51), (-2, 9)\}$

Latihan 1

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Manakah dari diagram berikut yang mendefinisikan fungsi?

a) 
b) 
c) 

d) 
e) 
f) 

2. Di antara relasi–relasi di bawah ini, relasi manakah yang merupakan suatu fungsi?
   a. f memasangkan setiap anak dengan ibunya.
   b. f memasangkan setiap negara dengan ibukotanya.
   c. f memasangkan setiap ayah dengan anak–anaknya.
   d. f memasangkan setiap siswa dengan nilai matematikanya.
   e. f memasangkan setiap bangku di kelas dengan seluruh siswa di kelas.
3. Jika diketahui domain $P = \{m, n, o\}$ dan kodomain $Q = \{1, 2, 3\}$, maka tentukan manakah dari pasangan berurutan berikut ini yang merupakan fungsi?

a. $R = \{(n, 3), (m, 2)\}$
b. $R = \{(m, 3), (n, 2), (o, 1)\}$
c. $R = \{(o, 1), (n, 2), (o, 3), m, 3)\}$
d. $R = \{(1, m), (2, n), (3, o)\}$
e. $R = \{(m, 2), (n, 2), (o, 2)\}$

4. Diketahui fungsi $f : x \to f(x)$ didefinisikan oleh $f(x) = x^3$ pada interval $-1 \le x \le 2$.
   a. Tentukan $f(1)$, $f(0)$, $f(1)$, dan $f(2)$!
   b. Tentukan domain, kodomain, dan range!
   c. Jika $(p - 1)$ anggota domain, tentukan nilai p untuk $f(x) = 8$!
5. Fungsi $f : R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = px + q$. Jika $f(3) = 20$ dan $f(-2) = 5$, tentukanlah nilai dari p dan q!

Tugas Individu

Kerjakan di buku tugas Anda!

Bila diketahui $C = \{a, b, c\}$ dan $D = \{1, 2\}$, maka tentukan:

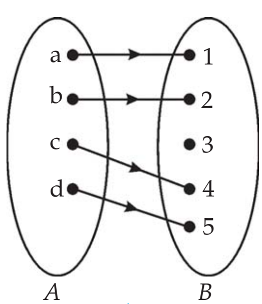
a. Berapa banyak fungsi yang berbeda yang dapat dibuat dari C ke D? Gambarkan semua diagram panah dan pasangan berurutannya!
b. Berapa banyak fungsi yang berbeda yang dapat dibuat dari D ke C? Gambarkan semua diagram panah dan pasangan berurutannya!
c. Apakah hasil a dan b sama? Berikan kesimpulan menurut pendapat Anda!

3. Sifat–Sifat Fungsi

Beberapa sifat khusus yang mungkin dimiliki suatu fungsi adalah:

a. Fungsi satu–satu (*injektif*)

Perhatikan diagram panah berikut ini!



Gambar 3.3

Ditentukan fungsi $f : A \to B$ yang didefinisikan sebagai diagram panah di samping. Dari diagram dapat terlihat bahwa setiap anggota himpunan A dipasangkan tepat satu anggota himpunan B yang berbeda. Fungsi yang seperti ini disebut fungsi satu–satu.

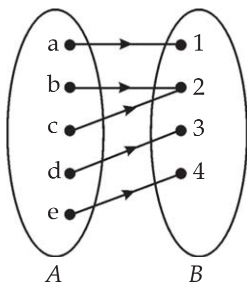
Jadi, dapat didefinisikan bahwa:

> Fungsi $f : A \rightarrow B$ merupakan fungsi satu–satu (*injektif*) jika setiap anggota yang berbeda di A memiliki pasangan di B yang berbeda.

Dari definisi di atas, dapat dikatakan bahwa jika $x_1, x_2 \in A$ dengan $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$, atau jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.

Contoh lain yang dapat membantu pemahaman Anda tentang fungsi satu–satu adalah setiap negara dengan benderanya. Setiap negara mempunyai benderanya masing–masing. Apakah ada satu bendera yang digunakan oleh dua negara? Tentunya tidak, negara yang berbeda mempunyai bendera yang berbeda pula. Dengan demikian, fungsi f yang memetakan setiap negara dengan benderanya merupakan fungsi satu–satu.

b. Fungsi pada (*subjektif*)



Gambar 3.4

Perhatikan diagram panah di samping!

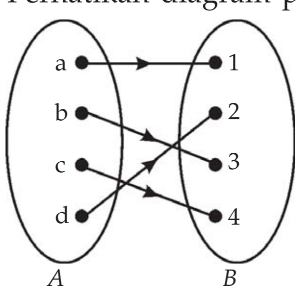
Dari diagram panah fungsi $f : A \rightarrow B$ di samping dapat terlihat bahwa setiap anggota himpunan A dipasangkan pada anggota setiap himpunan B sehingga diperoleh range sama dengan B atau $f(A) = B$.

Jadi, dapat didefinisikan bahwa:

> Fungsi $f : A \rightarrow B$ merupakan fungsi pada (*subjektif*) jika setiap anggota di B memiliki pasangan di A sehingga range f sama dengan B atau $f(A) = B$.

Dari definisi di atas dapat dikatakan bahwa setiap anggota $b \in B$ memiliki pasangan di A atau untuk setiap anggota $b \in B$, ada anggota $a \in A$ yang memenuhi $f(a) = b$ atau range $f(A) = B$.

c. Fungsi satu–satu dan pada (*bijektif*)
Perhatikan diagram panah berikut ini!



Gambar 3.5

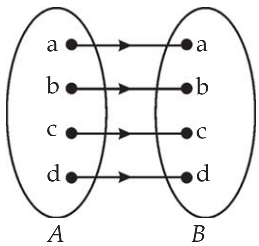
Dari diagram panah untuk fungsi $f : A \rightarrow R$ di samping dapat terlihat bahwa setiap anggota A dipasangkan tepat satu dengan anggota B dan juga range $f(A)$ sama dengan B. Oleh karena itu, fungsi f tersebut merupakan fungsi satu–satu (*injektif*) dan juga merupakan fungsi pada (*subjektif*). Fungsi yang seperti ini disebut fungsi *bijektif*.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa:

Fungsi $f : A \rightarrow B$ merupakan fungsi satu–satu dan pada (*bijektif*) jika fungsi f sekaligus merupakan fungsi satu–satu (*injektif*) dan fungsi pada (*subjektif*).

d. Fungsi identitas

Perhatikan diagram panah berikut ini!



Gambar 3.6

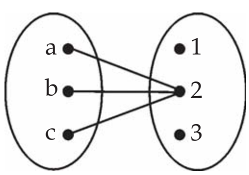
Fungsi f didefinisikan oleh diagram di samping. Dari diagram terlihat bahwa setiap anggota A dipasangkan dengan dirinya sendiri.

Fungsi $f : A \rightarrow A$ dengan f dirumuskan sebagai $f(x) = x$. Maka f disebut fungsi identitas.

Jadi, dapat dikatakan bahwa:

Fungsi f pada A merupakan fungsi identitas jika f memasangkan setiap anggota A dengan dirinya sendiri.

e. Fungsi konstan



Gambar 3.7

Perhatikan diagram panah berikut ini!

Fungsi $f : A \rightarrow B$ didefinisikan sebagai diagram di samping. Dari diagram terlihat bahwa setiap anggota himpunan A_i dipasangkan dengan hanya satu anggota himpunan B_i. Fungsi seperti ini disebut fungsi konstan.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa:

Fungsi $f : A \rightarrow B$ merupakan fungsi konstan jika setiap anggota himpunan A dipasangkan dengan hanya satu anggota himpunan B.

Latihan 2

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Diketahui himpunan $P = \{k, l, m, n\}$ dan $Q = \{w, x, y, z\}$.
   a. Bentuklah fungsi injektif yang mungkin dari himpunan P ke Q!
   b. Bentuklah fungsi injektif yang mungkin dari himpunan Q ke P!

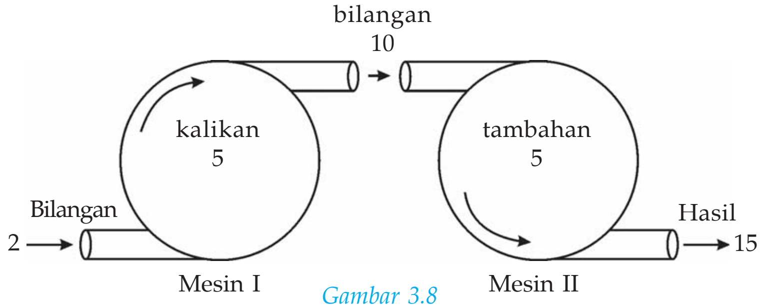
2. Diketahui himpunan $M = \{1, 2, 3\}$ dan $N = \{4, 5\}$.
   a. Bentuklah fungsi subjektif yang mungkin dari himpunan M ke N!
   b. Adakah fungsi subjektif yang mungkin dari himpunan N ke M? Mengapa?
3. Diketahui himpunan $S = \{a, b, c, d\}$ dan $T = \{p, q, r, s\}$
   Manakah fungsi berikut ini dari himpunan S ke T yang merupakan fungsi injektif, subjektif, bijektif, identitas, dan konstan? (Jika perlu buatlah diagramnya terlebih dahulu)
   a. $f = \{(a, p), (b, p), (c, r), (d, s)\}$
   b. $f = \{(a, s), (b, r), (c, q), (d, p)\}$
   c. $f = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
   d. $f = \{(a, s), (b, s), (c, s), (d, s)\}$
   e. $f = \{(a, r), (b, q), (c, p), (d, s)\}$
4. Tentukan mana yang merupakan fungsi subjektif, injektif, atau bijektif dari fungsi $f : R \to A$ yang ditentukan sebagai berikut.
   a. $f : x \to 3x + 5$
   b. $f : x \to 3x^2 + 1$
   c. $f : x \to \frac{1}{2}x - 2$
   d. $f : x \to x^2 - 4$
5. Jelaskan menurut pendapat Anda!
   a. Apakah fungsi konstan merupakan fungsi injektif?
   b. Dapatkah suatu fungsi konstan merupakan fungsi subjektif?
   c. Jika fungsi $f : R \to R$ yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^3$, apakah 9 merupakan fungsi injektif?

B. Fungsi Komposisi

1. Pengertian Fungsi Komposisi

Suatu fungsi dapat dikombinasikan atau digabungkan dengan fungsi lain, dengan syarat tertentu, sehingga menghasilkan fungsi baru. Seperti apakah fungsi baru tersebut? Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi berikut ini.

Untuk memetakan sebuah bilangan, dilakukan dua proses dengan menggunakan 2 mesin, seperti pada gambar berikut ini.



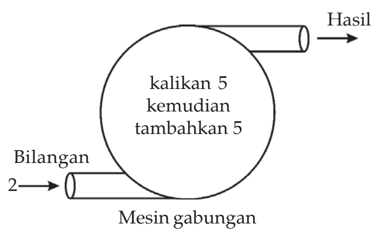
Gambar 3.8

Mesin I melakukan proses "kalikan dengan 5" dan mesin II melakukan proses "tambahkan dengan 5". Jika bilangan 2 dimasukkan dalam mesin I diolah dan diubah menjadi $2 \times 5 = 10$, lalu bilangan diolah oleh mesin II dan menghasilkan $10 + 5 = 15$. Jadi 2 dipetakan menjadi 15 oleh kedua mesin tersebut.

Apabila dimasukkan bilangan sembarang x, maka diperoleh hasil:

Mesin: $x \xrightarrow{\text{Mesin I}} 5x \xrightarrow{\text{Mesin II}} 5x + 5$

Bagaimana hasilnya bila kedua mesin tersebut digabungkan? Perhatikan gambar berikut ini.



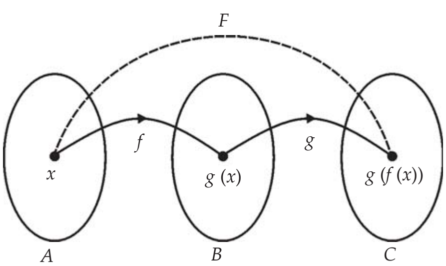
Gambar 3.9

Mesin gabungan dari mesin I dan II ini melakukan proses "kalikan dengan 5 kemudian tambahkan dengan 5". Jika bilangan 2 dimasukkan dalam mesin ini, diolah menjadi $2 \times 5 + 5 = 15$. Ternyata hasilnya sama dengan keluaran dari mesin I dan mesin II.

Apabila dimasukkan bilangan sembarang x, maka diperoleh hasil:

Mesin: $x \xrightarrow{\text{gabungan mesin}} 5x + 5$

Analog dengan ilustrasi di atas, komposisi fungsi g dan fungsi f dapat didefinisikan sebagai berikut.



Gambar 3.10

Jika $f : A \to B$ dan fungsi $g : B \to C$, maka fungsi F yang memetakan $A \to C$ melalui hubungan dua fungsi f dan g, dapat dinyatakan sebagai fungsi komposisi.

Secara matematis ditulis: $F : A \to C$ atau $F : x \to g\,(f\,(x))$ dengan rumus $F\,(x) = g\,(f\,(x))$.

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa:

Fungsi $f(x) = g(x)$ adalah komposisi fungsi f dan g, sehingga $f(x)$ disebut fungsi komposisi.

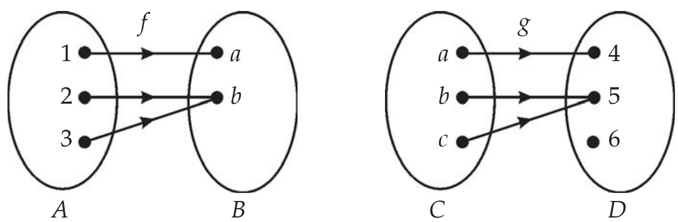
Bila komposisi disimbolkan oleh "$\circ$", maka fungsi komposisi $g\circ f$ adalah fungsi f dilanjutkan dengan fungsi g sehingga bentuk $g(f(x))$ dapat ditulis sebagai $(g\circ f)(x)$, yaitu:

$$F : x \to (g\circ f)(x) = g(f(x))$$

Agar Anda dapat lebih memahami fungsi komposisi, maka simaklah contoh berikut ini.

Contoh 3.3

Terdapat fungsi f dan g yang disajikan dalam diagram panah.



Gambar 3.11

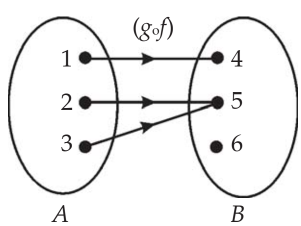
Range fungsi f, $R(f) = B \in C$. Pemadanan F dari A ke D yang didefinisikan dengan aturan $F(x) = (g\circ f)(x)$ merupakan fungsi karena memenuhi syarat–syarat fungsi, yaitu setiap anggota domain (daerah asal) dipasangkan dan pasangannya tunggal.

$(g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = 4$

$(g\circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = 5$

$(g\circ f)(3) = g(f(2)) = g(b) = 5$

Diagram fungsinya menjadi:



Gambar 3.12

Jadi, dari dua fungsi $f : A \to B$ dan $g : C \to D$ dapat digabungkan menjadi fungsi baru $(g\circ f) : A \to D$, hanya jika $B \in C$.

Apabila $B \neq C$ (B bukan anggota himpunan C), apakah pemadanan F dari A ke D juga merupakan fungsi?

2. Fungsi Komposisi Bilangan Real

Misalkan $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ adalah dua fungsi, maka dapat didefinisikan $F : g_{\circ}f$ dan juga $F = f_{\circ}g$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "F = g_{\circ}f"'] & R \arrow[r, "g"] & R \end{tikzcd} \quad \text{dan} \quad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "F = f_{\circ}g"'] & R \arrow[r, "f"] & R \end{tikzcd}$$

Gambar 3.13

Untuk lebih jelasnya, pelajarilah contoh berikut ini.

Contoh 3.4

1. Diketahui fungsi $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ ditentukan oleh $f(x) = 3x + 2$ dan $g(x) = x^2 + 2$. Tentukan:
   a. $(g_{\circ}f)(1)$
   b. $(f_{\circ}g)(1)$
   c. Bandingkan hasil (a) dan (b), berilah kesimpulan.

   Jawab:
   $f(x) = 3x + 2$ dan $g(x) = x^2 + 2$
   a. $(f_{\circ}g)(1) = g(f(1)) = 9(3.1 + 2) = 9(5) = 5^2 + 2 = 27$
   b. $(f_{\circ}g)(1) = f(g(1)) = f(1^2 + 2) = f(3) = 3.3 + 2 = 11$
   c. Hasil fungsi $g_{\circ}f$ dan $f_{\circ}g$ tidak sama. Jadi, dapat disimpulkan bahwa fungsi komposisi tidak komutatif.

2. Diketahui $f(x) = x^2 - 2$ dan $(f_{\circ}g)(x) = 4x^2 + 4x - 1$. Tentukan rumus fungsi $g(x)$!

   Jawab:
   $$\begin{aligned} (f_{\circ}g)(x) &= 4x^2 + 4x - 1 \\ f(g(x)) &= 4x^2 + 4x - 1 \\ (f(x))^2 - 2 &= 4x^2 + 4x - 1 \\ (g(x))^2 &= 4x^2 + 4x - 1 + 2 \\ (g(x))^2 &= 4x + 4x + 1 \\ (g(x))^2 &= (2x + 1)^2 \\ g(x) &= 2x + 1 \end{aligned}$$
   Jadi, rumus fungsi $g(x) = 2x + 1$

3. Diketahui $g(x) = 3x + 1$ dan $(f_{\circ}g) = 9x^2 + 3x + 1$. Tentukan rumus fungsi $f(x)$!

   Jawab:
   $$\begin{aligned} (f_{\circ}g)(x) &= 9x^2 + 3x + 1 \\ f(g(x)) &= 9x^2 + 3x + 1 \\ f(3x + 1) &= 9x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$
   Dimisalkan $3x + 1 = a$, maka $3x = a - 1$
   $$x = \frac{a - 1}{3}$$

diperoleh:

$$f(a) = 9\left(\frac{a-1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{a-1}{3}\right)$$

$$= 9\left(\frac{a^2-2a+1}{9}\right) + 3\left(\frac{a-1}{3}\right) + 1$$

$$= a^2 - 2a + 1 + a - 1 + 1$$

$$= a^2 - 2a + 1 + a - 1 + 1$$

$$= a^2 - a + 1$$

Jadi, rumus fungsi $f(x) = x^2 - x + 1$

3. Sifat Fungsi Komposisi

Seperti halnya operasi aljabar lainnya, komposisi suatu fungsi juga mempunyai sifat–sifat tertentu. Salah satu sifatnya adalah tidak memiliki sifat komutatif.

Fungsi komposisi tidak memiliki sifat komutatif, yaitu $(f{\circ}g) \neq (g{\circ}f)$

Untuk memahami sifat–sifat yang lain, pelajarilah contoh berikut.

Contoh 3.5

Diketahui $f : R \to R$, $g : R \to R$, dan $h : R \to R$ ditentukan oleh rumus $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = 3x$, dan $h(x) = x^2 + 1$. Tentukan:

a. $((f{\circ}g){\circ}h)(x)$;

b. $(f{\circ}(g{\circ}h))(x)$!

c. Bandingkan hasil a dan b. Apa yang dapat Anda simpulkan?

Jawab:

a. $(f{\circ}g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = 2(3x) + 4 = 6x + 4$

$$\begin{aligned} ((f{\circ}g){\circ}h)(x) &= (f{\circ}g)(h(x)) \\ &= (f{\circ}g)(x^2 + 1) \\ &= 6(x^2 + 1) + 4 \\ &= 6x^2 + 6 + 4 \\ &= 6x^2 + 10 \end{aligned}$$

Jadi, $((f{\circ}g){\circ}h)(x) = 6x^2 + 10$

b. $(g{\circ}h)(x) = g(h(x)) = g(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) = 3x^2 + 3$

$$\begin{aligned} (f{\circ}(g{\circ}h))(x) &= f((g{\circ}h)(x)) \\ &= f(3x^2 + 3) \\ &= 2(3x^2 + 3) + 4 \\ &= 6x^2 + 6 + 4 \\ &= 6x^2 + 10 \end{aligned}$$

Jadi, $(f{\circ}(g{\circ}h))(x) = 6x^2 + 10$

c. Hasil dari $(f_\circ g)_\circ h$ dan $f_\circ(g_\circ h)$ adalah sama, maka dapat disimpulkan bahwa:

Fungsi komposisi memiliki sifat asosiatif, yaitu $(f_\circ g)_\circ h = f_\circ(g_\circ h)$

Apabila pada contoh di atas diketahui fungsi identitas I pada R yang ditentukan oleh rumus $I(x) = x$ maka nilai $I_\circ f$ dan $f_\circ I$ adalah:

$(I_\circ f)(x) = \text{I}(f(x)) = \text{I}(2x + 4) = 2x + 4$

$(f_\circ I)(x) = f(I(x)) = f(x) = 2x + 4$

Hasil dari $I_\circ f$ dan $f_\circ I$ adalah sama, sehingga dapat disimpulkan bahwa:

Ada fungsi identitas, yaitu $I(x) = x$, artinya untuk setiap f akan berlaku $f_\circ I = I_\circ f = f$.

Latihan 3

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Diketahui fungsi $f : R \to R$ dan fungsi $g : R \to R$ ditentukan oleh rumus $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x^2 + x - 2$. Tentukan:
   a. Rumus fungsi $(g_\circ f)(x)$ dan $(f_\circ g)(x)$
   b. Nilai fungsi $(g_\circ f)(-4)$
   c. Nilai fungsi $(f_\circ g)(4)$
2. Tentukan rumus fungsi $f(x)$ dan nilai $f(2)$ jika diketahui:
   a. $g(x) = x + 2$ dan $(g_\circ f)(x) = x^2 - 6x + 9$
   b. $g(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ dan $(g_\circ f)(x) = \dfrac{x}{3x-2}$
3. Diketahui fungsi $f(x) = 2x - 3$ dan $(f_\circ g)(a) = 3$. Jika $g(x) = \dfrac{x-4}{2x-1}$, maka tentukan nilai a!
4. Diketahui fungsi $f : R \to R$, $g : R \to R$ dan ditentukan oleh rumus $f(x) = x + 2$, $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ dan $h(x) = 2x$. Tentukan:
   a. Rumus fungsi $(f_\circ g)(x)$ dan $(g_\circ h)(x)$
   b. Rumus fungsi $((f_\circ g)_\circ h)(x)$ dan $(f_\circ(g_\circ h))(x)$
5. Jika diketahui $f(x) = 2 - x$, $g(x) = x^2 + 1$, dan $h(x) = 3x$. Tentukan nilai x jika $(h_\circ g_\circ f)(x) = 6$!

C. Fungsi Invers

1. Pengertian Fungsi Invers

Pada subbab sebelumnya, Anda telah mempelajari fungsi dan penggunaannya. Suatu fungsi atau pemetaan pasti melibatkan dua himpunan. Misalkan f suatu fungsi yang memetakan himpunan A ke himpunan B sehingga setiap elemen $a \in A$ mempunyai peta $f(a) = b$ di B. Apabila pemetaan dibalik, dapatkah ditentukan fungsi g yang memetakan B ke A sehingga diperoleh peta?

Untuk mengetahuinya, sebelumnya simaklah contoh dalam kehidupan sehari–hari berikut ini.

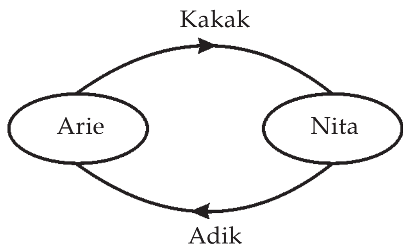
Keluarga Pak Rahmat memiliki dua anak yang bernama Arie dan Nita. Bila Arie adalah anak pertama dan Nita adalah anak kedua, maka hubungan kekerabatan antara keduanya dapat dikatakan:

Arie Kakak Nita

Apabila hubungan kekerabatan di atas dibalik, apakah mempunyai makna yang sama? Tentu saja hubungan tersebut dapat dikatakan:

Nita Adik Arie

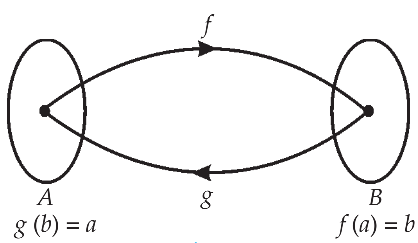
Kedua hubungan kekerabatan tersebut dapat dinyatakan dalam diagram panah, yaitu:



Gambar 3.14

Hubungan kebalikan tersebut dinamakan invers. Dari hubungan yang telah dijelaskan di atas, dapat digunakan untuk menentukan invers suatu fungsi.

Perhatikan gambar berikut ini!



Gambar 3.15

Jika fungsi g ada, maka f dan g disebut fungsi–fungsi invers, dan g adalah invers dari f atau dikatakan bahwa f adalah invers dari g.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

> Jika fungsi $f : A \rightarrow B$ yang mempunyai peta $f(a) = b$, maka invers f adalah fungsi $g : B \rightarrow A$ dengan peta $g(b) = a$.

Invers suatu fungsi dinyatakan dengan "pangkat –1", sehingga fungsi invers dari f ditulis:

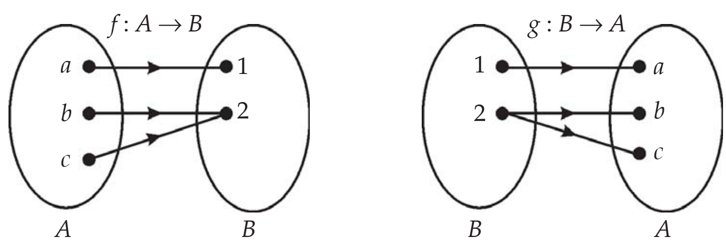
$$\boxed{g = f^{-1}}$$

Apakah suatu fungsi mempunyai invers? Untuk lebih jelasnya, perhatikan beberapa contoh berikut ini!

Contoh 3.6

1. Diketahui himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 2\}$. Fungsi $f : A \rightarrow B$ ditentukan dengan pasangan berurutan $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$
   a. Tentukan invers f adalah f^{-1} yang dinyatakan dalam pasangan berurutan.
   b. Tunjukkan f dan g dengan diagram panah, kemudian selidiki apakah invers f yaitu g merupakan fungsi?

   Jawab:
   a. Invers f adalah yang dinyatakan dengan pasangan berurutan, yaitu $g = \{(1, a), (2, b), (2, c)\}$
   b. Diagram panah f dan g adalah:



Gambar 3.16

   Dari diagram di atas, terlihat bahwa $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi. Sedangkan, invers fungsi f, yaitu $g : B \rightarrow A$ adalah bukan fungsi karena pada himpunan B terdapat anggota yang mempunyai kawan lebih dari satu di himpunan A.

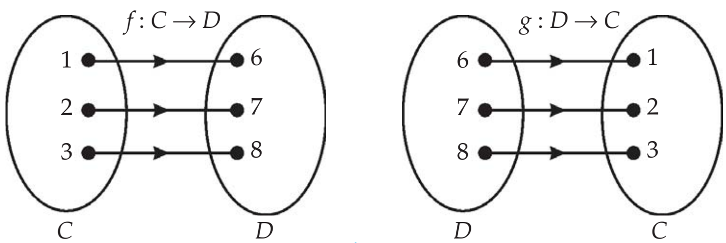
2. Diketahui himpunan $C = \{1, 2, 3\}$ dan $D = \{6, 7, 8\}$. Fungsi memetakan x di C ke $(x + 5)$ di D.
   a. Tuliskan fungsi f yang dinyatakan dalam pasangan berurutan.
   b. Tuliskan invers fungsi f adalah g yang dinyatakan dalam pasangan berurutan.
   c. Tunjukkan f dan g dengan diagram panah, kemudian selidiki apakah invers f, yaitu g merupakan fungsi.

Jawab:

a. Fungsi f adalah $f : C \to D$ yang dinyatakan dengan pasangan berurutan: $f = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

b. Invers fungsi $g : D \to C$ yang dinyatakan dengan pasangan berurutan: $g = \{(6, 1), (7, 2), (8, 3)\}$

c. Diagram panah f dan g adalah



Gambar 3.17

Dari diagram terlihat bahwa $f : c \to D$ adalah fungsi, dan invers fungsi f, yaitu $g : D \to C$ juga merupakan fungsi.
Berdasarkan contoh–contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

> Invers suatu fungsi tidak selalu merupakan fungsi.
> Invers suatu fungsi yang merupakan fungsi disebut fungsi invers.

Fungsi $f : A \to B$ mempunyai invers $g = f^{-1}$, yaitu $g = B \to A$. Jika setiap anggota B merupakan peta dari tepat satu anggota A, dan merupakan fungsi bijektif, maka berlaku:

> Teorema fungsi invers
> Bila $f : A \to B$ adalah fungsi bijektif maka invers fungsi f, yaitu $f^{-1} : B \to A$ juga merupakan fungsi bijektif.

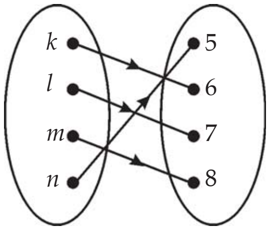
Latihan 4

Kerjakan di buku tugas Anda!

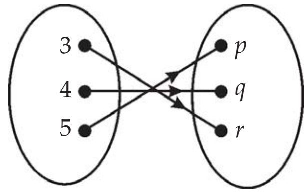
1. Diketahui himpunan $V = \{x, y, z\}$ dan $W = \{5, 6, 7, 8\}$. Fungsi ditentukan oleh $f = \{(x, 5), (y, 6), (z, 7)\}$.
   a. Tuliskan invers f adalah $g : W \to V$ yang dinyatakan dalam himpunan pasangan berurutan.
   b. Tunjukkan f dan g dengan diagram panah.
   c. Apakah invers f, yaitu g merupakan fungsi? Jelaskan alasan Anda!

2. Tentukan fungsi invers dari diagram panah berikut ini!

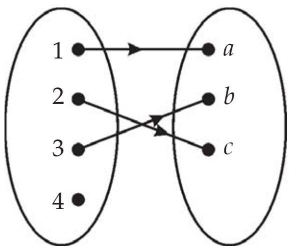
a.



b.



3. Tentukan fungsi invers dari fungsi–fungsi yang dinyatakan dengan pasangan berurutan berikut ini!
   a. $f = \{(5, 2), (6, 1), (7, 4), (8, 3)\}$
   b. $f = \{(3, c), (2, d), (1, e)\}$
4. Perhatikan diagram panah berikut ini!



Apakah invers dari fungsi f yang dinyatakan dengan diagram panah di samping merupakan fungsi? Jelaskan alasannya!

5. Mengapa invers suatu fungsi dapat dikatakan sebagai fungsi invers?

2. Menentukan Fungsi Invers

Suatu fungsi f yang memetakan x ke y dinyatakan dengan $f : x \rightarrow y$ atau ditulis $y : f(x)$. Invers fungsi f tersebut yang memetakan y ke x dinyatakan dengan $f^{-1} : y \rightarrow x$ atau ditulis $x = f^{-1}(y)$. Maka dapat dinyatakan bahwa:

Invers dari fungsi $y = f(x)$ adalah $x = f^{-1}(y)$

Bagaimanakah cara menentukan fungsi invers? Untuk mengetahuinya coba Anda pelajari contoh berikut ini.

Contoh 3.7

a. Diketahui fungsi $f : R \rightarrow R$ ditentukan oleh $f(x) = 2x + 5$. Tentukan rumus fungsi inversnya!

   Jawab:

   $f(x) = y$

   $2x + 5 = y$

   $2x = y - 5$

$$x = \frac{y-5}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

Jadi, fungsi inversnya adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$

b. Diketahui $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ untuk $x \neq 1$ dan f dalam R. Tentukan rumus fungsi inversnya dan nilai $f^{-1}(2)$!

Jawab:

1) $f(x) = y$

$$\frac{x}{x-1} = y$$

$$x = y(x-1)$$

$$x = yx - y$$

$$x - yx = -y$$

$$x(1-y) = -y$$

$$x = \frac{-y}{1-y}$$

$$x = \frac{y}{y-1}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{y-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$$

2) $f^{-1}(2) = \dfrac{2}{2-1} = \dfrac{2}{1} = 2$

Dari beberapa contoh di atas, dapat disimpulkan mengenai langkah–langkah menentukan fungsi invers, yaitu:

Langkah–langkah menentukan fungsi invers:

a. Misalkan $y = f(x)$, kemudian diubah menjadi bentuk $x = g(y)$
b. Gantilah x sebagai $f^{-1}(y)$ sehingga $f^{-1}(y) = g(y)$
c. Ubahlah huruf y dengan huruf x sehingga diperoleh fungsi invers $f^{-1}(x)$

Latihan 5

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Jika $f^{-1}(x)$ merupakan fungsi invers dari suatu fungsi, maka tentukan $f^{-1}(x)$ dari fungsi–fungsi berikut ini!
   a. $5x - 7$
   b. $2x^2 - 5$
   c. $1 + \sqrt{x}$
   d. $f(x) = \dfrac{2x+5}{3x-4}$, untuk $x \neq \dfrac{4}{3}$
   e. $f(x) = \dfrac{4x+1}{2-3x}$, untuk $x \neq \dfrac{2}{3}$
2. Diketahui $f : R \to R$ didefinisikan oleh $f(x) = x^3 + 5$. Tentukan rumus fungsi invers $f^{-1}(x)$ dan nilai $f^{-1}(13)$!
3. Bila $f(x) = \dfrac{x-1}{4-x}$ untuk $x \neq 4$ mempunyai fungsi invers, tentukan $f^{-1}(2)$!
4. Fungsi $f : R \to R$ didefinisikan oleh $f(x) = \sqrt{2x+5}$ dan $f^{-1}(x) = 2$. Tentukan nilai x!
5. Bila diketahui fungsi invers dari f adalah $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{1}{3}x+2}$, maka tentukan fungsi $f(x)$!

3. Grafik Fungsi dan Fungsi Inversnya

Telah Anda ketahui bahwa fungsi f memiliki fungsi invers (f^{-1}) hanya jika f bijektif (satu–satu dan pada). Fungsi–fungsi dan fungsi inversnya dapat disajikan dalam bentuk grafik. Grafik fungsi bijektif pada himpunan bilangan real (R) adalah sebuah kurva yang dibangun oleh himpunan titik–titik $\{(x, y = f(x))\}$. Sedangkan fungsi inversnya $f^{-1}(x)$ ditentukan oleh himpunan titik–titik $\{(y = f(x), x)\}$.

Agar lebih jelas, perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 3.8

Diketahui fungsi $f : R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = 2x + 6$. Tentukan:

a. rumus fungsi untuk $f^{-1}(x)$;
b. daerah asal untuk $f(x)$;

c. daerah asal untuk $f^{-1}(x)$;
d. Gambarlah grafik fungsi $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$;
e. Gambarlah fungsi identitas $f(x) = x$ atau $I(x) = x$!

Jawab:

a.
$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 2x + 6 &= y \\ 2x &= y - 6 \\ x &= \frac{y-6}{2} \\ f^{-1}(y) &= \frac{y-6}{2} \\ f^{-1}(x) &= \frac{x-6}{2} = \frac{1}{2}x - 3 \end{aligned}$$

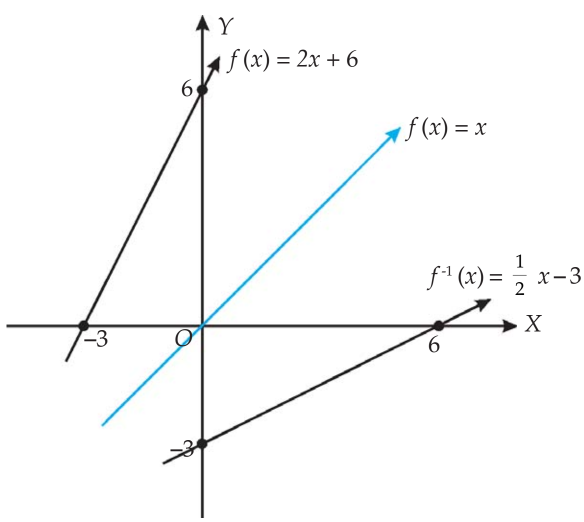
b. Daerah asal fungsi $f(x)$ adalah $\{x \mid x \in R\}$
c. Daerah asal fungsi $f^{-1}(x)$ adalah $\{x \mid x \in R\}$
d. 1) Untuk $f(x) = 2x + 6$

x	0	–3
$y = f(x)$	6	0

2) Untuk $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$

x	0	6
$y = f^{-1}(x)$	–3	0

e. Grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$



Gambar 3.18

Dari grafik di atas, terlihat bahwa grafik fungsi $f(x)$ dengan grafik fungsi inversnya $f^{-1}(x)$ simetris terhadap $f(x) = x$, sehingga dapat dikatakan bahwa:

Grafik fungsi invers $f^{-1}(x)$ adalah pencerminan dari grafik fungsi $f(x)$ terhadap garis $f(x) = x$.

Latihan 6

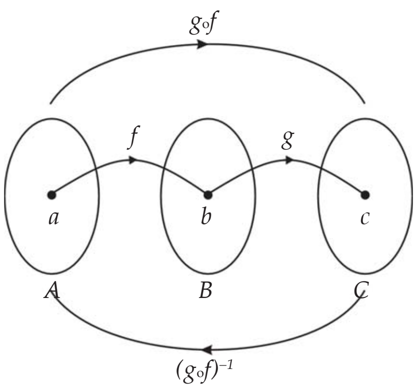
Kerjakan di buku tugas Anda!

Gambarkan grafik fungsi $f(x)$ dan grafik fungsi inversnya $f^{-1}(x)$ dalam satu gambar koordinat kartesius, dari fungsi–fungsi berikut ini.

1. $f(x) = 4x + 1$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$, $x \neq 3$
4. $f(x) = \dfrac{2x-2}{x+3}$, $x \neq -3$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$, $x \neq 5$

4. Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

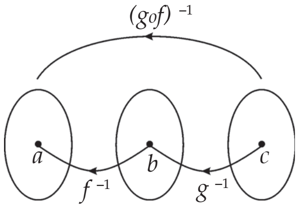
Setelah Anda mempelajari fungsi komposisi dan fungsi invers dari suatu fungsi, pada pembahasan ini Anda akan mempelajari mengenai fungsi invers dari fungsi komposisi. Untuk mempelajari lebih lanjut, perhatikan diagram panah berikut ini.



Gambar 3.19

Dari diagram di samping, dapat terlihat bahwa fungsi komposisi $(g \circ f)$ memetakan a ke c. Sedangkan fungsi invers dari $g \circ f$, yaitu $(g \circ f)^{-1}$ memetakan c ke a, atau dapat dinyatakan dengan $(g \circ f)^{-1}(c) = a$.

Dalam hal ini, g^{-1} memetakan c ke b dan f^{-1} memetakan b ke a, seperti terlihat pada diagram berikut ini.



Gambar 3.20

Sehingga diperoleh $f^{-1}(g^{-1}\circ g^{-1}) = f^{-1}(b) = a$ dengan $f^{-1}(g^{-1}(x)) = (f^{-1}\circ g^{-1})(c)$. Untuk sembarang nilai x, secara umum dapat dikatakan bahwa:

$$\boxed{(g\circ f)^{-1}(x) = (f^{-1}\circ g^{-1})(x)}$$

Untuk lebih jelasnya, simaklah contoh berikut ini.

Contoh 3.9

a. Diketahui fungsi $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ ditentukan oleh $f(x) = 3x + 4$ dan $g(x) = 6 - 2x$. Tentukan $(g\circ f)(x)$ dan $(g\circ f)^{-1}(x)$!

   Jawab:

   1) $$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(3x+4)\\ &= 6 - 2(3x+4)\\ &= 6 - 6x - 4\\ &= 2 - 6x\end{aligned}$$

   2) $$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= y\\ 2 - 6x &= y\\ 6x &= 2 - y\\ x &= \frac{2-y}{6}\\ (g\circ f)^{-1}(y) &= \frac{2-y}{6}\\ (g\circ f)^{-1}(x) &= \frac{2-x}{6}\end{aligned}$$

b. Jika diketahui fungsi invers $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{5}$ dan $g^{-1}(x) = \dfrac{3-x}{2}$, maka tentukan $(g\circ f)^{-1}(x)$ dan $(g\circ f)^{-1}(6)$!

   Jawab:

   1) $$\begin{aligned}(f\circ g)^{-1}(x) &= (g^{-1}\circ f^{-1})(x)\\ &= g^{-1}(f^{-1}(x))\\ &= g^{-1}\left(\frac{x-1}{5}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{3 - \frac{x-1}{5}}{2}$$

$$= \frac{\frac{15-(x-1)}{5}}{2}$$

$$= \frac{15 - x + 1}{5.2}$$

$$= \frac{16 - x}{10}$$

2) $(f \circ g)^{-1}\ (6) = \frac{16 - 6}{10}$

$$= \frac{10}{10}$$

$$= 1$$

Bagaimanakah bentuk fungsi invers dari fungsi komposisi $f : R \to R$, $g : R \to R$ dan $h : R \to R$? Untuk mengetahuinya, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 3.10

Diketahui fungsi $f : R \to R$, $g: R \to R$, dan $h : R \to R$ yang ditentukan oleh $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 3 - x$, dan $h(x) = 3x$. Tentukan fungsi invers $(h \circ g \circ f)^{-1}(x)$!

Jawab:

$$\begin{aligned}
(h \circ g \circ f)(x) &= h(g(f(x))) \\
&= h(g(2x - 1)) \\
&= h(3 - (2x - 1)) \\
&= h(3 - 2x + 1) \\
&= h(4 - 2x) \\
&= 3(4 - 2x) \\
&= 12 - 6x \\
(h \circ g \circ f)^{-1}(x) &= y \\
12 - 6x &= y \\
6x &= 12 - y \\
x &= \frac{12 - y}{6}
\end{aligned}$$

$(h \circ g \circ f)^{-1}(y) = \dfrac{12-y}{6}$

$(h \circ g \circ f)^{-1}(x) = \dfrac{12-x}{6}$

Dengan cara lain, yaitu menentukan fungsi invers dari masing-masing fungsi terlebih dahulu kemudian menentukan komposisinya, diperoleh:

1) $f(x) = 2x - 1 \Rightarrow$
$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 2x - 1 &= y \\ 2x &= y + 1 \\ x &= \frac{y+1}{2} \\ f^{-1}(y) &= \frac{y+1}{2} \\ f^{-1}(x) &= \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

2) $g(x) = 3 - x \Rightarrow$
$$\begin{aligned} g(x) &= y \\ 3 - x &= y \\ x &= 3 - y \\ g^{-1}(y) &= 3 - y \\ g^{-1}(x) &= 3 - x \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} h(x) &= 3x \\ h(x) &= y \\ 3x &= y \\ x &= \frac{1}{3}y \\ h^{-1}(y) &= \frac{1}{3}y \\ h^{-1}(x) &= \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

Dari hasil fungsi invers tersebut, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} (h \circ g \circ f)^{-1}(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1})(x) \\ &= f^{-1}(g^{-1}(h^{-1}(x))) \\ &= f^{-1}\left(g^{-1}\left(\frac{1}{3}x\right)\right) \\ &= f^{-1}\left(3 - \frac{1}{3}x\right) \end{aligned}$$

$$= f^{-1}\left(\frac{9-x}{3}\right)$$

$$= \frac{\frac{9-x}{3}+1}{2}$$

$$= \frac{\frac{9-x+3}{3}}{2}$$

$$(h \circ g \circ f)^{-1}(x) = \frac{12-x}{6}$$

Berdasarkan contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk menentukan fungsi invers dari komposisi tiga fungsi $f(x)$, $g(x)$ dan $h(x)$ digunakan persamaan:

$$\boxed{(h \circ g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1})(x)}$$

Latihan 7

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Diketahui fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$ yang ditentukan oleh $f(x) = \frac{1}{x+1}$ dengan $x \neq -1$ dan $g(x) = \frac{2}{3-x}$ dengan $x \neq 3$. Tentukan rumus fungsi invers $(f \circ g)^{-1}(x)$!
2. Jika $f(x) = \sqrt{x}$ dengan $x \geq 0$ dan $g(x) = \frac{x}{x+1}$ dengan $x \neq -1$, maka tentukan:
   a. rumus fungsi invers $(g \circ f)^{-1}(x)$;
   b. nilai fungsi $(g \circ f)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$!
3. Jika diketahui $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 8x - 3$ dan $g(x) = 2x + 4$, maka tentukan $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ dengan $x \neq (1)$!

4. Fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = 2x + 3$, dan $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ dengan $x \neq 2$. Tentukan:
   a. rumus fungsi invers $(g \circ f)^{-1}(x)$ dan $(f \circ g)^{-1}(x)$;
   b. nilai fungsi invers $(g \circ f)^{-1}(2)$ dan $(f \circ g)^{-1}(2)$;
   c. bandingkan hasil dari poin (*b*), apakah keduanya sama?

5. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ dengan $x \neq 0$, $g(x) = 3x + 6$ dan $h(x) = x - 1$.
   Tentukan:
   a. rumus fungsi invers $(h \circ g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g \circ h)^{-1}(x)$;
   b. nilai fungsi invers $(h \circ g \circ f)^{-1}(2)$ dan $(f \circ g \circ h)^{-1}(2)$;
   c. apakah kedua hasil pada poin (*b*) sama?

Tugas Kelompok

Kerjakan di buku tugas Anda!

Buatlah kelompok yang terdiri dari dua orang (teman sebangku). Carilah 5 macam benda atau alat yang didalamnya berlaku suatu fungsi. Sebutkan dan berilah masing-masing contoh dengan menyertakan input, output, dan fungsinya.

Rangkuman

1. Suatu fungsi dari himpunan *A* ke himpunan *B* adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan *A* dengan tepat satu anggota himpunan *B*.
2. Sifat-Sifat Fungsi
   a. Fungsi $f : A \to B$ merupakan fungsi satu-satu (injektif) jika setiap anggota yang berbeda di *A* memiliki pasangan di *B* yang berbeda.
   b. Fungsi $f : A \to B$ merupakan fungsi pada (subjektif) jika setiap anggota di *B* memiliki pasangan di *A* sehingga range *f* sama dengan *B* atau $f(A) = B$.

c. Fungsi $f : A \rightarrow B$ merupakan fungsi satu-satu dan pada (bijektif) jika fungsi f sekaligus merupakan fungsi satu-satu (injektif) dan fungsi pada (subjektif).

d. Fungsi f pada A merupakan fungsi identitas jika f memasangkan setiap anggota A dengan dirinya sendiri.

e. Fungsi $f : A \rightarrow B$ merupakan fungsi konstan jika setiap anggota himpunan A dipasangkan dengan hanya satu anggota himpunan B.

3. Pengertian Fungsi Komposisi

   a. Fungsi $f(x) = g(f(x))$ adalah komposisi fungsi f dan g, sehingga $f(x)$ disebut fungsi komposisi.

   b. $F : x \rightarrow (f \circ g)(x) = g(f(x))$

2. Fungsi Komposisi Bilangan Real

   a. Fungsi $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ maka $F = (g \circ f)$ dan $F = (f \circ g)$

3. Sifat Fungsi Komposisi

   a. Fungsi komposisi tidak memiliki sifat komutatif, yaitu $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

   b. Fungsi komposisi memiliki sifat asosiatif, yaitu $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

   c. Ada fungsi identitas, yaitu $I(x) = x$ artinya untuk setiap f akan berlaku $f \circ I = I \circ f = f$.

6. Pengertian Fungsi Invers

   a. Jika fungsi $f : A \rightarrow B$ yang mempunyai peta $f(a) = b$ maka invers f adalah fungsi $g : B \rightarrow A$ dengan peta $g(b) = a$.

7. Teorema fungsi invers:

   Bila $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi bijektif maka invers fungsi f yaitu $f^{-1} : B \rightarrow A$ juga merupakan fungsi bijektif.

8. Grafik Fungsi dan Fungsi Inversnya

   Grafik fungsi invers $f^{-1}(x)$ adalah pencerminan dari grafik fungsi $f(x)$ terhadap garis $f(x) = x$

9. Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

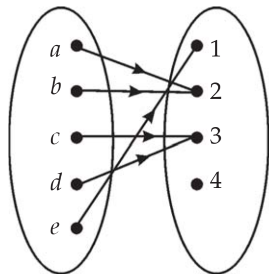
   $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

   $(h \circ g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1})(x)$

Uji Kompetensi

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar!

1. Perhatikan diagram panah berikut ini.



Tentukan domain, kodomain, dan range dari fungsi yang dinyatakan dengan diagram di samping!

2. Jika diketahui domain $A = \{p, q, r, s\}$ dan kodomain $B = \{t, u, v, w\}$, maka tentukan manakah dari pasangan berurutan berikut ini yang merupakan fungsi?
   a. $R = \{(p, t), (p, u), (q, u), (r, v), (s, v)\}$
   b. $R = \{(p, v), (q, v), (r, w), (s, w)\}$
   c. $R = \{(p, w), (q, v), (r, u), (s, t)\}$
   d. $R = \{(p, u), (q, w), (r, t), (r, u), (s, u)\}$
3. Diketahui himpunan $C = \{1, 2\}$ dan $D = \{3, 4\}$. Bentuklah fungsi bijektif yang mungkin dari himpunan C ke D.
4. Tentukan manakah yang merupakan fungsi injektif, subjektif, dan bijektif fungsi $f : R \rightarrow R$ yang ditentukan sebagai berikut:
   a. $f : x \rightarrow 5x - 9$
   b. $f : x \rightarrow 3x^2 - 2$
   c. $f(x) = \sqrt{x-1}$
   d. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
5. Jika diketahui $(f\,g)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $f(x) = x^2 - 1$, maka tentukan nilai dari $g(-2)$!

6. Dari fungsi f dan g diketahui $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ dan $g(x) = 3x - 2$. Jika $(g \circ f)(a) = -11$, maka tentukan nilai a!
7. Jika $A = \{x \mid -1 \le x\ 2, x \in \mathrm{R}\}$ dengan $f : A \to R$ didefinisikan $f(x) = 2 - 3x$ dan $g : R \to R$ didefinisikan $g(x) = x + 1$, maka tentukan daerah hasil dari $(g \circ f)(x)$!
8. Suatu fungsi dan $f : R \to R$ didefinisikan oleh $g(x) = 2x - 1$ dan $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x - 2$. Tentukan nilai $f(3)$!
9. Suatu fungsi $f : R \to R$, $g : R \to R$ dan $h : R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = x^3 + 2$ dan $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$ dan $h(x) = 5x$. Tentukan $(h \circ g \circ f)(x)$!
10. Diketahui fungsi $f(x + 4) = \dfrac{2x+9}{x+1}$, tentukan:
    a. fungsi invers $f^{-1}(x)$;
    b. daerah asal fungsi $f^{-1}(x)$!
11. Fungsi $f : R \to R$ didefinisikan oleh $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, dengan $x \ge 0$. Bila $f^{-1}(x) = -\dfrac{4}{3}$, tentukan nilai x!
12. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \dfrac{2x+3}{4-5x}$, $x \ne \dfrac{4}{5}$, dan grafik fungsi inversnya $f^{-1}(x)$ dalam satu gambar koordinat kartesius.
13. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x \ne -1$ dan $g(x) = 2x - 1$. Tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$!
14. Jika $f(x) = \sqrt{5+x}$ dan $g(x) = x^2 + 4$, maka tentukan nilai dari $(f \circ g)(x) + 3$.
15. Suatu fungsi $f(x) = \dfrac{2x-1}{3+x}$, $g(x) = x + 4$, dan $h(x) = x^2 + 1$. Tentukan $(f \circ g \circ h)^{-1}(x)$!

Pengayaan

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar!

1. Jika diketahui $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ dan $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x-2}\sqrt{x^2-4x+5}$, maka tentukan $g(x-3)$!
2. Tentukan $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$ dari fungsi $f(x) = \frac{x-1}{1+x}$ dan $g(x) = \frac{x^2+1}{1-x^2}$!
3. Diketahui suatu fungsi $f(x) = \sqrt[5]{1-x^3}+2$. Tentukan rumus fungsi inversnya!
4. Suatu fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ yang ditentukan oleh $f(x)$ dan $g(x)$. Diketahui $g(x) = x^2 - 1$ dan $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$. Tentukan rumus fungsi $f(x-2)$!
5. Diketahui $f(x) = x^2 - px$ dan $g(x) = 3x + 14$. Jika $2 + (f \circ g)(-4) = (g \circ f)(2)$, tentukan nilai p!

Bab 4
Limit Fungsi

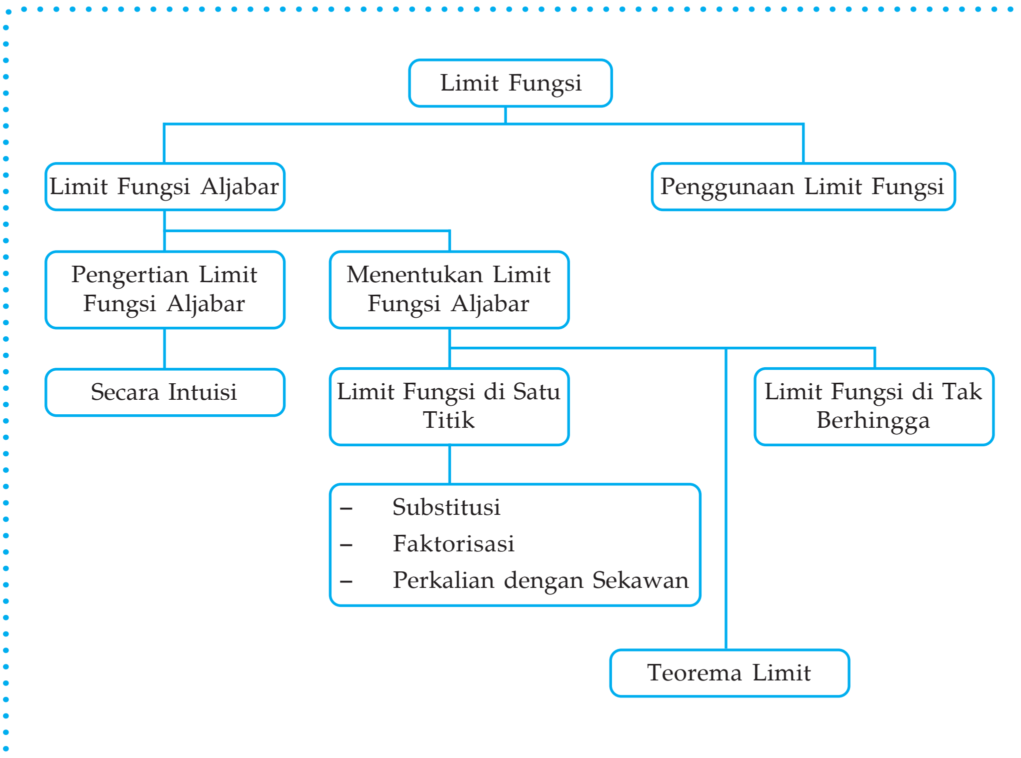
Standar Kompetensi

Menggunakan konsep limit fungsi dan turunan fungsi dalam pemecahan masalah

Kompetensi Dasar

- Menghitung limit fungsi aljabar sederhana di suatu titik
- Menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar

Peta Konsep



Sumber: images.google.co.id

Gambar 4.1

Sebelum membahas lebih jauh, masalah limit di dalam matematika, coba Anda perhatikan terlebih dahulu masalah limit di dalam kehidupan sehari-hari. Anda tentunya sering mendengar seseorang berkata, "Saya sudah di ambang batas kesabaran saya", atau "Saldo dalam tabungan saya hampir habis", atau "Pembalap itu terjatuh pada saat mendekati garis finish", dan juga "Limit pemakaian kartu kredit Anda adalah Rp1.000.000,00", serta kalimat-kalimat sejenisnya.

Bila Anda perhatikan, kata-kata seperti ambang, hampir, mendekati dan limit mengandung arti menuju satu batas, yaitu sesuatu yang dekat tetapi tidak dapat dicapai. Di dalam matematika, kata-kata tersebut cukup disebut dengan limit. Limit menjelaskan nilai suatu fungsi jika batas tertentu didekati. Mengapa harus didekati? Karena fungsi seringkali tidak terdefinisi pada titik-titik tertentu, misalnya fungsi $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ tak terdefinisi untuk titik $x = 1$. Oleh karena itu, Anda masih bisa mencari tahu berapa nilai yang didekati oleh fungsi jika titik itu semakin didekati.

A. Limit Fungsi Aljabar

Limit menyediakan dasar–dasar untuk kalkulus. Apa sajakah itu? Untuk lebih jelasnya, pelajarilah materi berikut ini!

Limit fungsi memuat pengertian tentang nilai fungsi yang diperoleh melalui pendekatan terhadap suatu batas tertentu.

Perhatikan fungsi f yang dinyatakan sebagai berikut.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

Apabila nilai $x = 1$ Anda substitusikan ke dalam fungsi $f(x)$ di atas, maka akan diperoleh nilai $f(x) = \frac{0}{0}$ sehingga $f(x)$ tak terdefinisi atau merupakan bilangan tak tentu.

Tetapi apakah fungi $f(x)$ mendekati bilangan tertentu apabila nilai x yang disubstitusikan mendekati 1? Untuk mengetahuinya, perhatikan tabel berikut yang menunjukkan nilai fungsi $f(x)$, bila x = 1 didekati dari kiri dan kanan

Tabel 4.1

x	0,9	0,99	0,999	$\to 1 \to$	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	$\to 2 \to$	2,001	2,01	2,1

Agar mudah dipelajari, nilai-nilai dalam tabel 4.1 dapat Anda sajikan dalam grafik seperti gambar berikut ini.

Dari tabel di atas, menunjukkan nilai f(x) untuk x = 1 didekati dari kiri dapat ditulis sebagai.

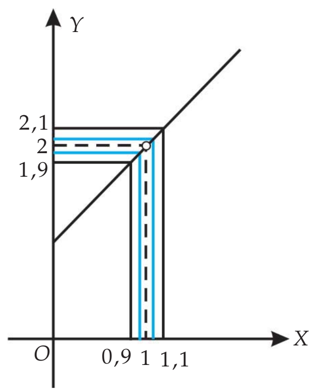
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Sedangkan, nilai $f(x)$ untuk x = 1 didekati dari kanan dapat ditulis sebagai

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Ternyata limit kiri dan limit kanan mendekati nilai yang sama, yaitu 2, maka dapat ditulis sebagai:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$



Gambar 4.2

Jadi, dapat disimpulkan bahwa:

> $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti jika x mendekati c dari kiri dan kanan sehingga nilai $f(x)$ mendekati L dari kiri dan kanan, maka nilai $f(x)$ mendekati L.
>
> $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c} f(x) = L$ (ada)

Untuk lebih memahami tentang pengertian limit, coba Anda perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 4.1

1. Berapakah nilai dari $\lim_{x \to 3} 4x - 5$?

   Jawab:

   $$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 4 . 3 - 5$$
   $$= 7$$

2. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$!

Jawab:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x + 2)$$

$$= 3 + 2$$

$$= 5$$

3. Jika diketahui fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{untuk } x < 1 \\ x + 1, \text{untuk } x \geq 1 \end{cases}$

Tentukan:

a. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$;

b. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$;

c. apakah $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$;

d. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$;

e. sketsa grafik fungsi $f(x)$!

Jawab:

a. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 + 1$

$= 1^2 + 1$

$= 2$

b. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x + 1$

$= 1 + 1$

$= 2$

c. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

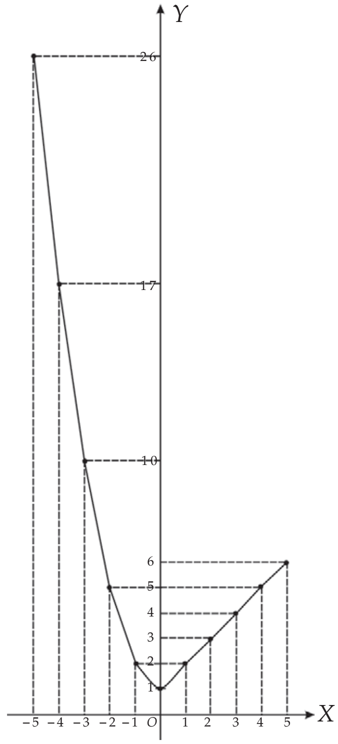
$= 2$

d. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$2 = 2$

Ya, $\lim\limits_{x \to 1^{-1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^{+1}} f(x)$.

e. sketsa grafik fungsi $f(x)$



Gambar 4.3

Info Matematika

Materi limit menyediakan dasar-dasar untuk kalkulus. Kalkulus diciptakan pada akhir abad ke-17, tetapi dasar-dasarnya belum teratur. Sampai pada akhirnya, Augustin Louis Cauchy bersama rekan sebayanya (Gauss, Abel, dan Bolzona) mengembangkan ketelitian baku. Mereka memberikan dasar kalkulus pada definisi yang jelas dari konsep limit. Kita berhutang pikiran lho sama mereka! Lalu siapakah generasi sekarang yang mau mengembangkannya?

B. Menentukan Limit Fungsi Aljabar

1. Limit Fungsi di Satu Titik

Sebelumnya, Anda telah mempelajari pengertian mengenai limit, ternyata nilai limit dapat diperoleh dengan beberapa cara, antara lain substitusi, faktorisasi, dan perkalian dengan sekawan.

a. Substitusi

Jika Anda perhatikan $\lim\limits_{x \to 2} (5x - 1) = 9$, ternyata nilai 9 dapat Anda peroleh dari substitusi $x = 2$ pada $5x - 1$. Untuk lebih memahaminya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 4.2

Tentukan $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 8)$ dan $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 2x + 1)$!

Jawab:

Fungsi $f(x) = (2x - 8)$ dan $f(x) = x^2 + 2x + 1$ termasuk fungsi suku banyak, sehingga mempunyai nilai di setiap titik. Nilai limitnya dapat diperoleh dengan cara substitusi, yaitu:

1) $f(3) = 2 \cdot 3 - 8 = -2$ (bilangan konstan)

$\lim\limits_{x \to 3} (2x - 8) = 2 \cdot 3 - 8 = -2$

2) $f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 16$ (bilangan konstan)

$\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 2x + 1) = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 16$

b. Faktorisasi

Untuk fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$, nilai $f(x)$ tidak dapat Anda cari dengan cara substitusi karena bila Anda substitusikan $x = 3$ dalam fungsi $f(x)$ akan menghasilkan pecahan berbentuk $\dfrac{0}{0}$ (bilangan tak tentu/tak terdefinisi). Agar nilai limit dari fungsi tersebut dapat Anda peroleh, maka perlu diubah dengan faktorisasi, yaitu:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} (x + 1) = 3 + 1 = 4$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 4.3

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$!

Jawab:

Untuk $x = 2$ dengan $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ diperoleh $f(2) = \dfrac{2^3 - 8}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$.

Bila Anda perhatikan uraian di atas, fungsi $f(x)$ tak terdefinisi untuk $x = 2$ karena menghasilkan pecahan. Nilai limit fungsi tersebut dapat Anda peroleh dengan faktorisasi, yaitu:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4)$$

$$= 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12$$

c. Perkalian dengan Sekawan

Selanjutnya, bagaimana cara menentukan nilai limit dari fungsi $f(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ untuk x mendekati 9 agar nilai fungsinya bukan pecahan $\dfrac{0}{0}$?

Untuk menyelesaikan limit dari fungsi tersebut, maka dapat Anda lakukan cara perkalian dengan sekawan. Bentuk sekawan dari $\sqrt{x} - 3$ adalah $\sqrt{x} + 3$, maka:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} &= \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \\
&= \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3^2} \\
&= \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}{(x-9)} \\
&= \lim_{x \to 9} \left(\sqrt{x}+3\right) \\
&= \sqrt{9} + 3 \\
&= 6
\end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} = 6$

Untuk lebih memahami cara menentukan limit di atas, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 4.5

Hitunglah $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$!

Jawab:

$f(2) = \dfrac{4-2^2}{3-\sqrt{4+5}} = \dfrac{0}{0}$ (tak terdefinisi)

maka:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} \times \frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{3^2 - \left(\sqrt{x^2+5}\right)^2}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2+5}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(4-x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} (3+\sqrt{x^2+5})$$

$$= 3 + (3+\sqrt{2^2+5})$$

$$= 3 + \sqrt{9} = 6$$

Jadi, nilai $\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = 6$.

Latihan 1

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Jika diketahui $f(x) = \begin{cases} 4x+1, x<1 \\ 2x-1, x\geq 1 \end{cases}$, tentukan:

   a. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$;

   b. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$;

   c. $\lim_{x\to 1} f(x)$;

   d. sketsa grafik $f(x)$!

2. Jika diketahui $f(x) = \begin{cases} -x+1,\ x<1 \\ x-1,\ 1<x<2 \\ 5-x^2,\ x\geq 2 \end{cases}$, tentukan:

   a. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$;

   b. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$;

   c. $\lim_{x\to 1} f(x)$;

   d. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$;

   e. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$;

   f. $\lim_{x\to 2} f(x)$;

   g. sketsa grafik $f(x)$!

3. Selesaikan soal-soal berikut dengan cara substitusi!

a. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

b. $\lim\limits_{x\to -2} (x^2 - 3x + 2)$

c. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{9+4^2}}{x-3}$

d. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 + 7x - 6}{x+3}$

e. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

4. Selesaikan soal–soal berikut ini dengan cara faktorisasi!

a. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

b. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^3 - 8}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 16x}{x^2 + 4x}$

d. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{16 - x^2}$

e. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{6-x}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x-2} \right)$

5. Selesaikan soal-soal berikut ini menggunakan cara perkalian dengan sekawan!

a. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{16 - x^2}{2\sqrt{x} - 4}$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$

c. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x-2} - 2}{\sqrt{3x} - 3}$

d. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-x^2}{5 - \sqrt{2x+1}}$

e. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$

2. Teorema Limit

Setelah Anda mempelajari pengertian limit fungsi aljabar dan penyelesaian soal–soal limit pada sub bab sebelumnya, sebenarnya Anda telah menggunakan satu atau lebih sifat limit. Sifat-sifat limit yang sering digunakan dalam menyelesaikan soal-soal limit secara lengkap dirangkum dalam teorema limit berikut.

Jika f dan g fungsi–fungsi yang mempunyai limit di c, dengan n bilangan bulat positif dan k konstanta, maka:

1. $\lim\limits_{x \to c} a = a$

2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$

3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

4. $\lim\limits_{x \to c} a \,.\, f(x) = a \,.\, \lim\limits_{x \to c} f(x)$

5. $\lim\limits_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

6. $\lim\limits_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(\mathrm{x})$

7. $\lim\limits_{x \to c} (f(x) \,.\, g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to c} g(x)$

8. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, dengan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

9. $\lim\limits_{x \to c} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to c} f(x)\right)^n$

10. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, dengan $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ bila n genap

Agar lebih memahami teorema limit di atas, perhatikanlah beberapa contoh berikut ini.

Contoh 4.6

1. $\lim\limits_{x \to 5} 10 = 10$

2. $\lim\limits_{x \to 1} 5x^2 = 5 \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 5 \,.\, 1^2 = 5$

3. $$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} (3x^2 - 2x) &= \lim_{x \to 4} 3x^2 - \lim_{x \to 4} 2x \\ &= 3 \lim_{x \to 4} x^2 - 2 \lim_{x \to 4} x \\ &= 3 \,.\, 4^2 - 2 \,.\, 4 \\ &= 48 - 8 \\ &= 40 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x^2 + 11}}{x} &= \frac{\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2 + 11}}{\lim\limits_{x \to 5} x} \\ &= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 5} (x^2 + 11)}}{\lim\limits_{x \to 5} x} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 5} x^2 + \lim_{x\to 5} 11}}{\lim_{x\to 5} x}$$

$$= \frac{\sqrt{5^2 + 11}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{36}}{5}$$

$$= \frac{6}{5}$$

5. $\lim_{x\to -2} \sqrt[3]{(2x^3 + 15)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -2} (2x^3 + 15)}$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to -2} 2x^3 + \lim_{x\to -2} 15}$$

$$= \sqrt[3]{2 \lim_{x\to -2} x^3 + \lim_{x\to -2} 15}$$

$$= \sqrt[3]{2 \times (-2)^3 + 15}$$

$$= \sqrt[3]{-16 + 15}$$

$$= \sqrt[3]{-1}$$

$$= -1$$

Tugas Kelompok

Kerjakan dengan kelompok Anda!

Carilah informasi dari buku atau internet tentang limit fungsi dari suatu harga mutlak. Kemudian tunjukkan apakah nilai dari $\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ itu ada?

Latihan 2

Kerjakan di buku tugas Anda!

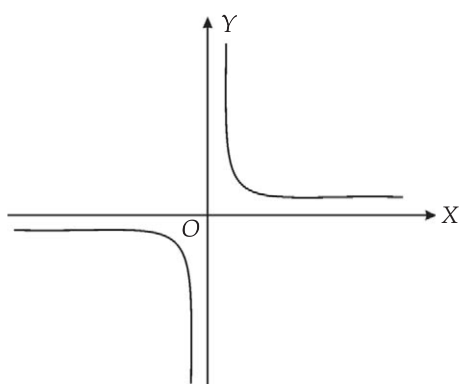
Dengan menggunakan teorema limit, tentukan nilai-nilai limit fungsi di bawah ini!

1. $\lim\limits_{x \to 5} 125$
2. $\lim\limits_{x \to 2} 4x^3$
3. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x}{3x^3 - 16}$
4. $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{5x^2 + 2x}$
5. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3 - \sqrt{x}}{17 - x^2}$
6. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2)^2$
7. $\lim\limits_{x \to 1} (x + 1)^2 (3x - 5)^3$
8. $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{\dfrac{5x^2 - 3x + 10}{3x + 10}}$
9. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{4x^3 + 8x}{x + 4}\right)^{\frac{1}{3}}$
10. $\lim\limits_{x \to 5} \left(2x^4 - 9x^3 + 19\right)^{-\frac{1}{2}}$

3. Limit Fungsi di Tak Berhingga

Perhatikan grafik fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x}$ di samping!

Dari grafik di samping, fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tak terdefinisi untuk $x = 0$. Apakah nilai limitnya ada untuk x mendekati nol bila didekati dari kiri ke kanan?



Gambar 4.4

Untuk $x \to 0^-$, nilai fungsi $f(x)$ ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 4.2

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$	...	$\to 0$
$f(x)$	-1	$-\frac{4}{3}$	-2	-4	-10	-100	-1000	...	$\to -\infty$

Dari tabel di atas terlihat bahwa apabila x menuju nol maka nilai $\frac{1}{x}$ semakin kecil menuju tak berhingga. Maka nilai $f(x)$ untuk $x = 0$ didekati dari kiri dapat ditulis sebagai:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Sedangkan untuk $x \to 0^+$, nilai fungsi $f(x)$ ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 4.3

x	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	...	$\to 0$
$f(x)$	1	$\frac{4}{3}$	2	4	10	100	1000	...	$\to \infty$

Dari tabel di atas, terlihat bahwa apabila x menuju nol maka nilai $\frac{1}{x}$ semakin besar menuju tak berhingga. Maka, nilai $f(x)$ untuk $x = 0$ didekati dari kanan dapat ditulis sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Karena limit kiri dan limit kanan berbeda, maka dapat dikatakan bahwa nilai $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ tidak ada.

Bagaimana nilai limitnya apabila x mendekati tak berhingga (∞) dari kiri dan kanan? Untuk mengetahinya, coba perhatikan uraian berikut ini. Untuk $x \to \infty$, nilai fungsi $f(x)$ ditunjukkan pada tabel berikut.

Tavel 4.4

x	1	10	100	1000	10.000	....	$\to \infty$
$f(x)$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10.000}$	....	$\to 0$

Dari tabel di atas terlihat bahwa apabila x menuju tak berhingga maka nilai $\frac{1}{x}$ makin kecil mendekati nol. Maka, nilai $f(x)$ untuk $x = \infty$ didekati dari kanan dapat ditulis sebagai berikut.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Sedangkan, untuk $x \to -\infty$, nilai fungsi $f(x)$ ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 4.5

x	-1	-10	-100	-1000	-10.000	....	$\to -\infty$
$f(x)$	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$	$-\frac{1}{10.000}$	....	$\to 0$

Dari tabel di atas terlihat bahwa apabila x menuju tak berhingga maka nilai $\frac{1}{x}$ makin kecil mendekati nol. Nilai $f(x)$ untuk $x = -\infty$ didekati dari kiri dapat ditulis sebagai berikut.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Karena nilai kedua limit fungsi untuk $x = \infty$ di atas adalah sama, maka dapat disimpulkan bahwa:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

dan diperoleh:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x^n} = 0 \text{ untuk setiap } n > 1 \text{ dan } k \in \text{Real}$$

$$\lim_{x \to \infty} kx^n = \infty \text{ untuk setiap } n > 1 \text{ dan } k \in \text{Real}$$

Contoh 4.7

Tentukanlah nilai limit fungsi di bawah ini!

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10}{x} = \frac{10}{\infty} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 5x - 7}{2x^2 - 1}$

Pangkat tertinggi dari fungsi di atas adalah x^2 maka masing–masing suku dibagi x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-5x-7}{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^2-5x-7}{x^2}}{\frac{2x^2-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4-\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}{2-\frac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{4-0-0}{2-0}$$

$$= \frac{4}{2}$$

$$= 2$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+2} \times \frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2+3x\right)-\left(x^2+2\right)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+2}}$$

karena $x = \sqrt{x^2}$ maka dibagi x dan x^2

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x-2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+3x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$

$$= \frac{3-0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

Tugas Kelompok

Kerjakan dengan kelompok Anda!

Setelah mempelajari materi limit di tak berhingga, coba Anda tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_o x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m}$ dengan $a_o \neq 0$, $b_o \neq 0$ dan untuk

(i) $m = n$

(ii) $m > n$

(iii) $m < n$

Latihan 3

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{3x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} 17x^3$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x-5)^2}{x^2+5}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+2x-5}{x^3-4x+7}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-5x+3}{9x^3+2x-7}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2+5x} - \sqrt{4x^2-3x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2-5x+3}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x^2+3}}{2-x^2}$
10. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)}}$

C. Penggunaan Limit Fungsi

Selain digunakan untuk menghitung pendekatan nilai di suatu titik, limit juga digunakan dalam pencarian garis singgung suatu kurva di titik tertentu.

Perhatikan gambar berikut ini!

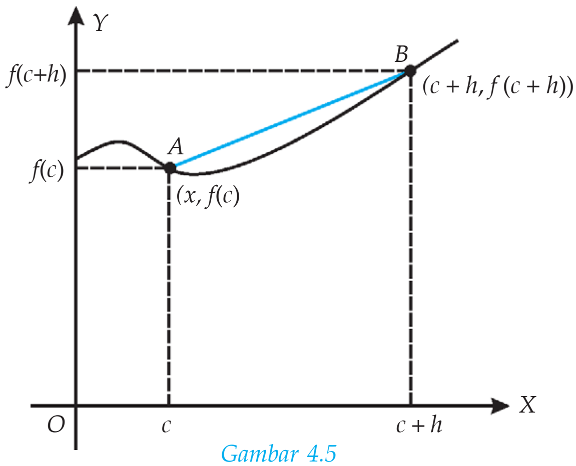
Bila diketahui terdapat 2 titik, misalnya (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) maka gradien garis yang melalui A dan B adalah:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dengan $A(c, f(c))$ dan $B(c + h, f(c + h))$ maka:

$$m_{AB} = \frac{f(c+h) - f(c)}{c+h-c}$$

$$= \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



Gambar 4.5

Bila $h \to 0$ maka A dan B akan berhimpit di $x = c$, maka diperoleh gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di $x = c$, yaitu:

$$m_c = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Jadi, untuk semua x diperoleh gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di x yaitu:

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Untuk lebih jelasnya, simaklah beberapa contoh berikut ini!

Contoh 4.8

1. Tentukan $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$ bila $f(x) = 2x + 5$!

   Jawab:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(2(5+h)+5\right) - (2 \cdot 5 + 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10 + 2h + 5 - 10 - 5}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2$$

$$= 2$$

2. Sebuah mobil melaju kencang dalam posisi yang memenuhi persamaan $f(x) = t^2 + 3t$, dengan $x \geq 0$. Berapakah kecepatan rata-rata mobil pada saat $t = 2$?

Jawab:

Kecepatan mobil dapat dicari dengan menggunakan limit fungsi dari fungsi $f(x)$, yaitu

$$v\,'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

untuk $t = 2$ diperoleh:

$$v\,'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left((2+h)^2 + 3(2+h)\right) - \left(2^2 + 3 \cdot 2\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 6 + 3h - 4 - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 7h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \mathrm{h} + 7$$

$$= 7$$

Tugas Kelompok

Kerjakan dengan kelompok Anda!

Buatlah kelompok yang terdiri dari 4 orang. Timbanglah berapa berat badan Anda masing–masing. Berat badan (dalam kilogram) dinyatakan dengan $W(t) = 0{,}2t^2 - 0{,}09t$, dengan t dalam minggu. Tentukan laju pertumbuhan badan Anda setelah 2 minggu! Siapakah di antara anggota kelompok yang laju pertumbuhan badannya paling besar?

Latihan 4

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tentukan $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$ bila $f(x) = x^2 + 3$!
2. Tentukan $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bila $f(x) = x^2 - 2x$!
3. Buktikan bahwa $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 9$ untuk $f(x) = x^2 + 5x + 1$!
4. Carilah kemiringan (gradien) garis singgung kurva $y = x^3 - 2x$ di $x = -3$!
5. Pendapatan dalam rupiah dari produksi x kg suatu barang dinyatakan oleh $R(x) = 0{,}5x - 0{,}002x^2$. Berapa laju perubahan sesaat dari pendapatan tersebut untuk $x = 100$?

Rangkuman

1. Definisi limit secara intuisi

   $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ berarti jika x mendekati c dari kiri dan kanan sehingga nilai $f(x)$ mendekati L dari kiri dan kanan, maka nilai $f(x)$ mendekati L.

   $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ (ada)
2. Nilai limit fungsi di satu titik dapat diperoleh dengan cara:
   a. substitusi;
   b. faktorisasi;
   c. perkalian dengan sekawan.
3. Teorema limit

   a. $\lim\limits_{x\to c} a = a$

   b. $\lim\limits_{x\to c} x = c$

c. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

d. $\lim\limits_{x \to c} a\,f(x) = a \lim\limits_{x \to c} f(x)$

e. $\lim\limits_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

f. $\lim\limits_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$

g. $\lim\limits_{x \to c} (f(x) \,.\, g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to c} g(x)$

h. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, dengan $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ ¹ 0

i. $\lim\limits_{x \to c} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x \to c} f(x)\right)^n$

j. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, dengan $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$ bila n genap

4. Limit fungsi di tak berhingga

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{k}{x^n} = 0$ untuk setiap $n > 1$ dan $k \in$ Real

c. $\lim\limits_{x \to \infty} kx^n = \infty$ untuk setiap $n > 1$ dan $k \in$ Real

5. Gradien (kemiringan) kurva

a. untuk $x = c$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(x)}{h}$$

b. untuk semua x

$$m = f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Uji Kompetensi

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar!

1. Jika diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2, x \le 0 \\ x, 0 < x < 1 \\ 1 + x^2, x \ge 1 \end{cases}$ maka tentukan:

   a. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

   b. $\lim\limits_{x \to 1^{-1}} f(x)$

   c. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

2. Dengan menggunakan substitusi, tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 4x - 4}{x - 3}$!

3. Hitunglah nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$ dengan cara faktorisasi!

4. Tentukan $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - 2x}}$ menggunakan perkalian dengan sekawan!

Dengan menggunakan teorema limit, tentukan nilai–nilai limit fungsi nomor 5–8 berikut ini!

5. $\lim\limits_{x \to -1} (2x^3 - 5x)$

6. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1)(3x - 1)$

7. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^4 - 8}{x^3 + 24}$

8. $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{-3x^3 + 7x^2}$

9. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = 5$!

10. Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{5x^3 - 4x + 7}$!

11. Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x}-x-2\right)$!

12. Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{1+8x^2}{x^2+4}}$!

13. Tentukan $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$ bila diketahui $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$!

14. Carilah kemiringan (gradien) garis singgung kurva $y = x^2 - 3x + 2$ di titik-titik dengan $x = -2$ dan $x = 2$!

15. Sebuah partikel bergerak sepanjang garis koordinat yang dinyatakan $S = \sqrt{5t+1}$, dengan t dalam sekon. Hitunglah kecepatan partikel pada akhir 5 sekon!

Pengayaan

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar!

1. Tentukan nilai $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{y}}-\dfrac{4}{\sqrt[3]{y}}}{\dfrac{4}{\sqrt{y}}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{y}}}$!

2. Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$!

3. Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2n}-x}{1-x}$!

4. Jika $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{ax+b-\sqrt{x}}{x-4} = \dfrac{3}{4}$ maka berapakah $a + b$?

5. Diketahui $y = \sqrt{x}$ dan titik-titik M, N, O, dan P berkoordinat (1,0), (0,1), (0,0) dan (x,y). Hitunglah:

   a. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\text{keliling}\,\Delta NOP}{\text{keliling}\,\Delta MOP}$

   b. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\text{luas}\,\Delta NOP}{\text{luas}\,\Delta MOP}$

Bab 5
Turunan Fungsi

Standar Kompetensi

Menggunakan konsep limit fungsi dan turunan fungsi dalam pemecahan masalah

Kompetensi Dasar

- Menggunakan sifat dan aturan turunan dalam perhitungan turunan fungsi aljabar
- Menggunakan turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi aljabar dan memecahkan masalah
- Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi aljabar
- Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi aljabar dan penafsirannya

Peta Konsep

- Turunan Fungsi
  - Turunan Fungsi
    - Pengertian Turunan Fungsi
    - Notasi Turunan Fungsi
    - Teorema Turunan Fungsi
    - Aturan Rantai
  - Karakteristik Grafik Fungsi
    - Persamaan Garis Singgung
    - Fungsi Naik dan Fungsi Turun
    - Titik Stasioner
    - Sketsa Grafik dengan Turunan Pertama
  - Penggunaan Turunan Fungsi

Sumber: images.google.co.id

Gambar 5.1

Konsep turunan fungsi yang universal banyak digunakan dalam berbagai bidang. Misalnya dalam bidang ekonomi turunan fungsi digunakan untuk menghitung keuntungan marginal. Dalam bidang biologi untuk menghitung laju pertumbuhan organisme. Dalam bidang fisika, turunan fungsi digunakan untuk menghitung laju bola jatuh dari ketinggian. Bagaimanakah penggunaan konsep turunan fungsi dalam bidang–bidang tersebut?

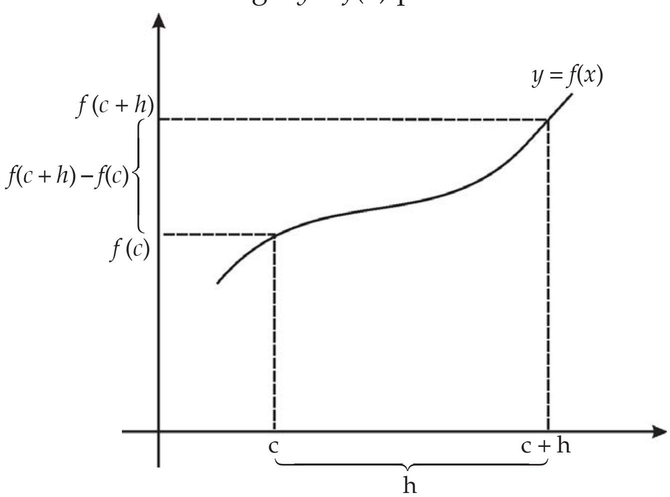
Apakah kelajuan kereta api juga dapat dihitung menggunakan turunan fungsi? Anda akan mengetahuinya setelah mempelajari materi dalam bab ini.

A. Turunan Fungsi

1. Pengertian Turunan Fungsi

Sebelum kita membahas suatu turunan suatu fungsi lebih mendalam, marilah kita mengingat kembali pembahasan sebelumnya mengenai limit suatu fungsi. Apa hubungan turunan fungsi dengan limit fungsi?

Perhatikan fungsi $y = f(x)$ pada domain $c \leq x \leq c + h$ dalam gambar 5.2.



Gambar 5.2

Nilai fungsi $y = f(x)$ pada domain $c \le x \le c + h$ berubah dari $f(x)$ untuk $x = c$ sampai dengan $f(x + h)$ untuk $x = c + h$. Sehingga perubahan rata–rata nilai fungsi f terhadap x dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{(c+h)-c} = \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Jika nilai h makin kecil (mendekati nol) maka nilainya menjadi $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$, yang disebut laju perubahan nilai fungsi f pada $x = c$. Bentuk limit seperti ini disebut turunan (derivatif) fungsi f pada $x = c$. Apabila turunan fungsi $f(x)$ dinyatakan dengan $f\,'(x)$ (dibaca $f(x)$ aksen), maka dapat didefinisikan bahwa:

Turunan fungsi f adalah fungsi lain $f\,'$ yang nilainya pada sembarang bilangan c.

$$f\,'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}, \text{ apabila limit ini ada.}$$

Jika limit tersebut ada, maka dikatakan bahwa f diturunkan (didiferensialkan) di c. Pencarian nilai turunan disebut pendiferensialan, sedangkan bagian kalkulus yang berhubungan dengan turunan disebut kalkulus diferensial.

Bagaimanakah penggunaan konsep turunan fungsi dalam kehidupan sehari–hari? Untuk mengetahuinya, coba Anda simak ilustrasi berikut.

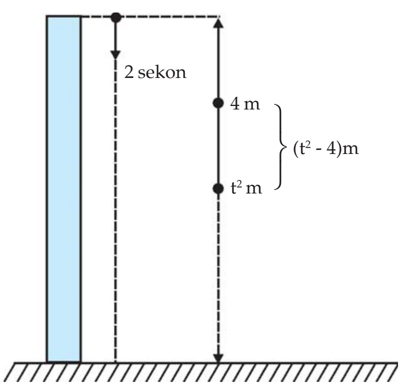
Pada suatu medium tertentu, sebuah bola dijatuhkan lurus dari suatu ketinggian dengan panjang lintasan t^2 meter setelah t sekon. Bagaimanakah cara menentukan laju bola tersebut setelah 2 sekon?

Perhatikan gambar 5.3.

Laju rata–rata dari gerakan bola pada selang waktu tertentu adalah hasil bagi antara selisih jarak tempuh dengan selisih waktunya.

Pada selang waktu t–2 sekon, panjang lintasan bola adalah $\frac{t^2-4}{t-2}$.

Laju bola pada saat $t = 2$ dinyatakan sebagai turunan fungsi atau limit dari laju bola untuk t mendekati 2, yaitu:



Gambar 5.3

$$v = f'(x) = \lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 4}{t - 2}$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{(t-2)(t+2)}{(t-2)}$$

$$= \lim_{t \to 2} t + 2$$

$$= 4$$

Jadi, laju rata–rata dari gerakan bola tersebut adalah 4 m/s.

Dapat disimpulkan bahwa:

> Laju rata–rata atau perubahan nilai fungsi f pada $x = c$ merupakan turunan fungsi f pada $x = c$ dapat dinyatakan sebagai
>
> $$f'(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Untuk lebih memahami tentang pengertian turunan fungsi, perhatikan contoh–contoh berikut ini.

Contoh 5.1

Jika $f(x) = \frac{1}{x}$, maka tentukan turunan dari $f(x)$!

Jawab:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x - x - h}{x(x-h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{xh(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x^2 + xh}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

Info Matematika

Sir Isaac Newton (1642–1727), ahli matematika dan fisika bangsa Inggris, dan Gottfriend Wilhelm Leibniz (1646–1716), ahli matematika bangsa Jerman, dikenal sebagai ilmuwan yang menemukan kembali kalkulus.

Dewasa ini kalkulus memberikan bantuan tak ternilai dalam menyelesaikan masalah pada beberapa cabang ilmu pengetahuan. Apa sajakah itu? Konsep turunan sebagai bagian utama dari kalkulus dipikirkan pada saat yang bersamaan oleh Newton dan Leibniz dari tahun 1665 sampai 1675 sebagai suatu alat untuk menyelesaikan berbagai masalah geometri dan mekanika.

Latihan 1

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Dengan menggunakan definisi $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

   Tentukan turunan pertama dari fungsi–fungsi berikut ini.

   a. $f(x) = x^2 + 3x + 4$
   b. $f(x) = x^3 - 2x$
   c. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-4}$
   d. $f(x) = \sqrt{x^2+4}$
   e. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-2}}$

2. Dengan menggunakan definisi $f'(x) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$, tentukan turunan pertama dari fungsi–fungsi berikut ini!

   a. $f(x) = x^2 - x$ untuk $x = 3$
   b. $f(x) = x^3 + 2x^2$ untuk $x = -1$
   c. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ untuk $x = 4$
   d. $f(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{5x+16}}$ untuk $x = 4$
   e. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$ untuk $x = 3$

3. Tentukanlah!

   a. Jika $f(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$, maka tentukan $f(x) + 2x\,f'(x)$!
   b. Jika $f(x) = \dfrac{3x^2-5}{x+6}$, maka tentukan $f(0) + 6\,f'(0)$!
   c. Jika $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x}}{3x-2}$, maka tentukan $2\sqrt{3}\,.\,f'(1)$!

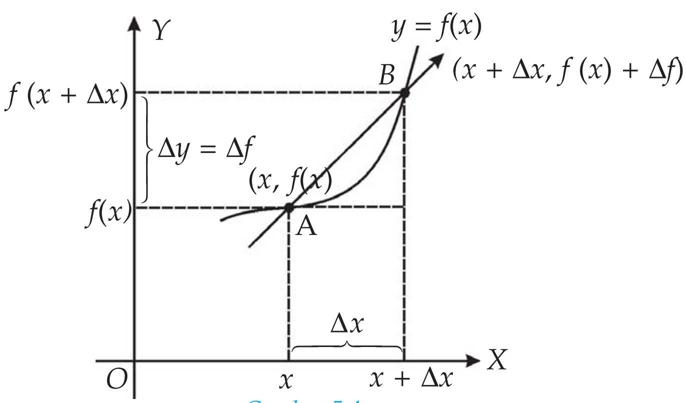
4. Berat sebuah mangga pada saat t dalam minggu dinyatakan dengan $w(t) = 0{,}4t^2 - 0{,}08t$ (w dalam kilogram). Tentukan laju pertumbuhan buah tersebut dalam 10 minggu!
5. Sebuah bisnis berhasil baik sehingga keuntungan totalnya setelah t tahun mencapai $1.000t^2$ rupiah. Berapakah laju keuntungan sesaat (keuntungan marjinal) pada $t = 2$?

2. Notasi Turunan Fungsi

Ada beberapa notasi yang dapat digunakan untuk menuliskan lambang turunan fungsi $y = f(x)$. Notasi turunan fungsi $f(x)$ yang telah kita pelajari, yaitu $f'(x)$ diperkenalkan oleh seorang matematikawan Perancis bernama Louis Lagrange (1936–1813). Jika $y = f(x)$ maka $y' = f'(x)$.

Notasi lain yang dapat digunakan adalah notasi turunan fungsi yang diperkenalkan seorang matematikawan Jerman bernama Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Notasi Leibniz menyatakan turunan fungsi y terhadap variabel x, yaitu dengan $\dfrac{dy}{dx}$ atau y'.

Perhatikan gambar di bawah ini!



Gambar 5.4

Lihatlah gradien garis singgung AB pada gambar 5.4. Variabel x berubah menjadi $x + \Delta x$ sehingga variabel y berubah menjadi $y + \Delta y$ atau variabel $f(x)$ berubah menjadi $f(x + \Delta x)$. Jadi, dapat dinyatakan $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Jika Δx merupakan pengganti h, maka:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ merupakan gradien tali busur AB. Bila Δx mendekati nol, maka gradien tali busur mendekati gradien garis singgung di A. Dengan menggunakan notasi Leibniz $\frac{dy}{dx}$, gradien garis singgung dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \quad \text{atau} \quad \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Untuk lebih jelasnya, simaklah contoh berikut ini.

Contoh 5.2

Bila diketahui $y = 3x^2 - 1$, maka tentukan $\frac{dy}{dx}$!

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 - 1 - (3x^2 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 6x + 3h$$

$$= 6x$$

Jadi, turunan pertama $y = 3x^2 - 1$ adalah $6x$.

Latihan 2

Kerjakan di buku tugas Anda!

Dengan menggunakan notasi Leibniz, tentukan turunan fungsi–fungsi berikut!

1. $y = \sqrt{3x}$
2. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$
3. $y = x^3 + 5x$
4. $y = \dfrac{2z}{z^2 - z}$
5. $y = 8x^2 - 1$

3. Teorema Turunan Fungsi

Semua fungsi $y = f(x)$ dapat diturunkan fungsinya menggunakan definisi turunan yang telah Anda pelajari. Namun, bila menentukan turunan suatu fungsi yang lebih rumit, maka akan rumit dan terlalu lama dalam menyelesaikannya. Untuk mempermudah perhitungan, Anda dapat menggunakan bentuk–bentuk umum yang disajikan sebagai teorema–teorema dasar turunan fungsi.

a. Teorema 1

Misalkan, $f(x) = 20$ maka turunan pertama fungsi $f'(x) = 0$. Maka dapat disimpulkan bahwa:

> Turunan fungsi konstan
> Jika $y = f(x) = k$ dengan k konstanta, maka $f'(x) = 0$ atau
> $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(k) = 0$.

b. Teorema 2

Bila diketahui suatu fungsi $f(x) = x$ maka turunan pertama fungsinya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1 \text{ atau } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - (x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 1$$

$$= 1$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa:

> Turunan fungsi identitas
>
> Jika $y = f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) = 1$.

Contoh 5.2

Jika fungsi $f(x) = 5x$, tentukan turunan $f'(x)$!

Jawab:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(5x) = 5$$

c. Teorema 3

Misalnya, fungsi $f(x) = x^3$ maka turunan pertamanya adalah:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \\
&= 3x^2
\end{aligned}$$

Dari contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa

> Turunan fungsi pangkat
>
> Jika $y = f(x) = x^n$ dengan n bilangan rasional, maka $f'(x) = nx^{n-1}$
>
> atau $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

Untuk lebih jelasnya, simaklah contoh berikut ini.

Contoh 5.3

Diketahui $f(x) = x^2$. Tentukan turunan pertama dari fungsi tersebut!

Jawab:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= n.\ x^{n-1} \\
&= 2x^{2-1} \\
&= 2x
\end{aligned}$$

Apabila bentuk fungsi $f(x) = ax^n$, bagaimanakah turunan fungsinya?

d. Teorema 4

Apabila diketahui fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dimana $g(x) = c\, f(x)$ dengan c suatu konstanta, maka turunan fungsinya adalah:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c.f(x+h)-c.f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} c\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

$$= c.\,f'(x)$$

Dapat disimpulkan bahwa:

Turunan hasil kali konstanta dengan fungsi

Jika f suatu fungsi dengan c suatu konstanta dan g fungsi yang didefinisikan oleh $g(x) = c.\,f(x)$ dan $f'(x)$ ada, maka

$$g'(x) = c.f'(x) \text{ atau } \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c.f(x)) = c.f'(x)$$

Contoh 5.4

Bila $f(x) = x^3$ maka tentukan turunan pertama dari fungsi $g(x) = -7\,f(x)$ dengan $c = -7$!

Jawab:

Dengan menggunakan teorema 3 diperoleh:

$f'(x) = 3.\,x^3 = 3x^2$

Dengan menggunakan teorema 4 diperoleh:

maka $g'(x) = c\,.\,f'(x)$

$= -7.\,(3x^2)$

$= -21x^2$

e. Teorema 5

Apabila diketahui u dan v adalah fungsi–fungsi dari $f(x) = u(x) + v(x)$, maka turunan fungsi $f(x)$ adalah:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$= u'(x) + v'(x)$$

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa:

> Turunan penjumlahan fungsi
> Jika u dan v adalah fungsi–fungsi dari x yang dapat diturunkan dengan $y = f(x) = u(x) + v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ atau
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u + v) = u' + v'$$

Contoh 5.5

Bila diketahui fungsi $y = 5x^2 - 7x$, maka tentukanlah fungsi y'!

Jawab:

Dimisalkan $u(x) = 5x^2 \Rightarrow u'(x) = 5 \,.\, 2x' = 10x$

$v(x) = -7 \Rightarrow v'(x) = -7$

Jadi, $y' = u'(x) + v'(x) = 10x - 7$

f. Teorema 6

Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 5.6

Jika diketahui sebuah fungsi $y = 7x^3 - 2x^2$, tentukan turunan fungsinya!

Jawab:

Dimisalkan $u(x) = 7x^3 \Rightarrow u'(x) = 7 \,.\, 3x^2 = 21x^2$

$v(x) = 2x^2 \Rightarrow v'(x) = 2 \,.\, 2x^1 = 4x$

Jadi, $y' = (21x^2) - (4x) = 21x^2 - 4x$.

Dari contoh di atas dapat disimpulkan bahwa:

> Turunan pengurangan fungsi
> Jika u dan v adalah fungsi–fungsi dari x yang dapat diturunkan dan $y = f(x) = u(x) - v(x)$ maka $f'(x) = u'(x) - v'(x)$ atau
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u - v) = u' - v'$$

g. Teorema 7

Jika diketahui fungsi $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, maka turunan fungsinya dapat diperoleh sebagai berikut.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

Untuk mempermudah perhitungan, kita tambahkan bentuk $-u(x+h) \cdot v(x) + u(x+h) \cdot v(x)$ pada pembilang g. Hal ini tidak mengubah nilai karena bentuk tersebut bernilai nol.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x+h) \cdot v(x) + u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)\left[v(x+h) - v(x)\right] + v(x)\left[u(x+h) - u(x)\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)\left[v(x+h) - v(x)\right]}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x)\left[u(x+h) - u(x)\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} u(x+h). \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \to 0} v(x). \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$= u(x).\ v'(x) + v(x).\ u'(x)$$

$$= u'(x).\ v(x) + u(x).\ v'(x)$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa:

> Turunan perkalian fungsi
> Jika u dan v adalah fungsi–fungsi dari x yang dapat diturunkan, dan $y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
>
> atau $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(u \cdot v) = u'v + uv'$

Untuk memahami penggunaan teorema 7, simaklah contoh berikut ini.

Contoh 5.7

Diketahui fungsi $f(x) = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$, tentukan turunan fungsi $f'(x)$!

Jawab:

$f(x) = \underbrace{(x^2 + 2)}_{u}\ \underbrace{(x^3 + 1)}_{v}$ dimisalkan $u(x) = x^2 + 2$ maka $u'(x) = 2x$

$v(x) = x^3 + 1$ maka $v'(x) = 3x^2$

diperoleh

$f'(x) \quad = \quad u'(x) \,.\, v(x) + u(x).\, v'(x)$

$\quad = \quad (2x)(x^3 + 1) + (x^2 + 2)(3x^2)$

$\quad = \quad 2x.\, x^3 + 2x.\, 1 + x^2.\, 3x^2 + 2.\, 3x^2$

$\quad = \quad 2x^4 + 2x + 3x^4 + 6x^2$

$\quad = \quad 5x^4 + 6x^2 + 2x$

atau dengan cara lain:

$f(x) \quad = \quad (x^2 + 2)(x^3 + 1)$

$\quad = \quad x^2.\, x^3 + x^2 \,.\, 1 + 2.\, x^3 + 2.\, 1$

$\quad = \quad x^{2+3} + x^2 + 2x^3 + 2$

$\quad = \quad x^5 + 2x^3 + x^2 + 2$

maka

$f'(x) \quad = \quad 5x^{5-1} + 2.\, 3x^{3-1} + 2x^{2-1} + 0$

$\quad = \quad 5x^4 + 6x^2 + 2x$

h. Teorema 8

Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 5.8

Tentukan turunan fungsi $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{3x + 5}$!

Jawab:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1 \rightarrow u(x)}{3x + 5 \rightarrow v(x)}$$

dimisalkan $u(x) = 2x^2 - 1$, maka $u'(x) = 2 \,.\, 2x^{2-1} - 0 = 4x$

$v(x) = 3x + 5$, maka $v'(x) = 3$

Turunan fungsi tersebut adalah

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(x)\cdot(3x+5) - (2x^2-1)\cdot(3)}{(3x+5)^2}$$

$$= \frac{4x\cdot 3x + 4x\cdot 5 - 2x^2\cdot 3 + 1\cdot 3}{(3x+5)^2}$$

$$= \frac{12x^2 + 20x - 6x^2 + 3}{(3x+5)^2} = \frac{6x^2 + 20x + 3}{(3x+5)^2}$$

Berdasarkan contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

Turunan pembagian fungsi
Jika u dan v adalah fungsi–fungsi dari x yang dapat diturunkan,

dan $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ untuk $v(x) \neq 0$, maka

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \text{ atau } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Tugas Individu

Kerjakan di buku tugas Anda!

Dengan menggunakan definisi turunan $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

coba Anda buktikan bahwa:

1. Jika $f(x) = u(x) - v(x)$ maka $f'(x) = u'(x) - v'(x)$
2. Jika $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ maka $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Latihan 3

Kerjakan di buku tugas Anda!

Dengan menggunakan teorema–teorema turunan fungsi, tentukan turunan pertama dari fungsi–fungsi berikut!

1. $f(x) = 17x^2$
2. $f(x) = 15x^3 - 4x$
3. $f(x) = \sqrt{2x^5}$
4. $f(x) = 5x^6 - 3x^5 + 11x - 9$
5. $f(x) = \frac{1}{2x} + 2x$
6. $y = (-3x + 2)^2$
7. $y = (x^4 - 1)(x^2 + 1)$

8. $y - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^4}$

9. $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

10. $y = \frac{4}{2x^3 - 2x}$

Tugas Kelompok

Kerjakan bersama kelompok Anda!

Sebelumnya,buatlah kelompok yang terdiri dari 2 orang siswa (teman sebangku Anda). Apabila diketahui suatu fungsi dengan pangkat bulat negatif, yaitu $y = f(x) = x^{-n}$ dimana $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, maka buktikan bahwa turunan pertama dari fungsi tersebut adalah $f'(x) = -nx^{-n-1}$ atau $y' = -nx^{-n-1}$. Kemudian, tentukan turunan dari fungsi berikut!

1. $f(x) = \frac{2}{x}$

2. $f(x) = \frac{-2}{x^4}$

3. $y = \frac{-8}{x^{10}}$

4. $y = \frac{2}{3x^6}$

5. $y = -\frac{3}{x^2}$

4. Aturan Rantai

Teorema–teorema turunan suatu fungsi yang telah Anda pelajari pada subbab sebelumnya belum cukup untuk mencari turunan dari fungsi majemuk. Seperti apakah fungsi majemuk itu? Bagaimanakah cara untuk menyelesaikan turunan pertama dari fungsi majemuk? Simaklah contoh berikut ini.

Contoh 5.9

Bila diketahui suatu fungsi $f(x) = (3x + 5)^{10}$, tentukan turunan pertama dari fungsi tersebut!

Penyelesaian:

Apabila Anda mennggunakan teorema 3 (turunan fungsi pangkat) untuk mencari turunan fungsi ini, Anda harus menjabarkan fungsinya terlebih dahulu. Dengan cara tersebut tentunya akan memerlukan yang lama dan lebih rumit. Untuk menyelesaikannya, buatlah permisalan seperti berikut.

$y = f(x) = (3x + 5)^{10}$

dimisalkan $u = 3x + 5$

$$\frac{du}{dx} = u' = 3$$

Dengan permisahan di atas, dapat ditulis sebagai berikut.

$y = (3x + 5)^{10}$

$y = u^{10}$ atau $f(u) = u^{10}$

turunan fungsinya adalah:

$$\frac{dy}{dx} = y' = 10\ u^{10}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\begin{aligned} y' &= 10.\ u^9.\ u' \\ &= 10\ (3x + 5)^9.\ (3) \\ &= 30\ (3x + 5)^9 \end{aligned}$$

Dari uraian contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

> Jika $y = f(u) = u^n$ dengan $u = g(x)$, maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$
>
> atau $y' = n\ .\ u^{n-1}\ .\ u'$

Untuk memahami penggunaan persamaan di atas, pelajarilah contoh berikut ini.

Contoh 5.10

1. Tentukan turunan fungsi $y = (x^3 - 3x + 11x)^9$!

   Jawab:

   Fungsi $y = (x^3 - 3x + 11x)^9$

   dimisalkan $u = x^3 - 3x^2 + 11x$

   $$\frac{du}{dx} = u' = 3x^2 - 6x + 11$$

   $$y = u^9$$

   $$\frac{dy}{du} = 9u^{9-1} = 9u^8$$

   Sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

   $$y' = 9u^8 . u'$$

   $$= 9\,(x^3 - 3x^2 + 11x)^8 . (3x^2 - 6x + 11)$$

2. Tentukan turunan fungsinya $y = \sqrt{5x-7}$.

   Jawab:

   Fungsi $y = \sqrt{5x-7} = (5x-7)^{\frac{1}{2}}$

   Dimisalkan: $u = 5x - 7$

   $$\frac{du}{dx} = u' = 5$$

   $$y = u^{\frac{1}{2}}$$

   $$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$$

   turunan fungsinya adalah:

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

   $$= \frac{1}{2}\,u^{-\frac{1}{2}} . u'$$

   $$= \frac{1}{2}\,(5x-7)^{-\frac{1}{2}} . 5$$

   $$y' = \frac{5}{2\sqrt{5x-7}}$$

3. Tentukan turunan fungsi $y = \left(\dfrac{x+1}{3x-4}\right)^6$!

Jawab:

Fungsi $y = \dfrac{(x+1)}{(3x-4)}$

$$
\begin{aligned}
\text{Dimisalkan:}\quad u &= \frac{(x+1)}{(3x-4)} \\
\frac{du}{dx} &= u' = \frac{(1)(3x-4)-(x+1)(3)}{(3x-4)^2} \\
&= \frac{3x-4-3x-3}{(3x-4)^2} \\
&= -\frac{7}{(3x-4)^2} \\
y &= u^6 \\
\frac{dy}{du} &= 6u^{6-1} \\
&= 6u^5
\end{aligned}
$$

Sehingga turunan fungsinya adalah:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\
&= 6u^5 .\ u' \\
&= 6\left(\frac{x+1}{3x-4}\right)^5 \cdot \left(-\frac{7}{(3x-4)^2}\right) \\
y' &= -\frac{42}{(3x-4)^2}\left(\frac{x+1}{3x-4}\right)^5
\end{aligned}
$$

4. Tentukan turunan fungsi dari $y = \left[(3x^2+5)(x^3-11)\right]^7$

Jawab:

Fungsi $y = \left[(3x^2+5)(x^3-11)\right]^7$

Dimisalkan $u = (3x^2 + 5)\ (x^3 - 11)$

$$\frac{du}{dx} = u' = (3.2x^{2-1})(x^3 - 11) + (3x^2 + 5)(3x^{3-1})$$

$$= (6x)(x^3 - 11) + (3x^2)(3x^2 + 5)$$

$$= 6x^4 - 66x + 9x^4 + 15x^2$$

$$= 15x^4 + 15x^2 - 66x$$

$$y = u^7$$

$$\frac{dy}{du} = 7u^{7-1} = 74^6$$

Turunan fungsinya adalah:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 7u^6 .\ u'$$

$$= 7\left[\left(3x^2 + 5)(x^3 - 11\right)\right]^6 \left(15x^4 + 15x^2 - 66x\right)$$

$$y' = \left(105x^4 + 105x^2 - 462x\right)\left[\left(3x^2 + 5)(x^3 - 11\right)\right]^6$$

Latihan 4

Kerjakan di buku tugas Anda!

Dengan menggunakan aturan rantai, tentukan turunan pertama dari fungsi–fungsi berikut!

1. $f(x) = (4x^3 + 7x)^{23}$
2. $f(x) = (3x^4 + x - 8)^{-3}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\left(3x^4 + x - 8\right)^8}$
4. $f(x) = \left[(5x + 6)(x - 13)\right]^4$
5. $f(x) = \sqrt[3]{5x^2 - 1}$
6. $y = \left(2x - 12x^2 + 11x - 9\right)^{10}$
7. $y = \dfrac{3}{\left(4x^3 + 11x\right)^7}$

8. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x + 4}}$

9. $y = \left(\dfrac{3x^2 + 2}{2x^2 - 5}\right)^3$

10. $y = \dfrac{(4x + 3)^{10}}{5}$

11. $f(x) = \left(x^3 - \dfrac{3}{x^5}\right)^3$

12. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}}$

13. $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

14. $y = x^3 \sqrt{x^2 + 1}$

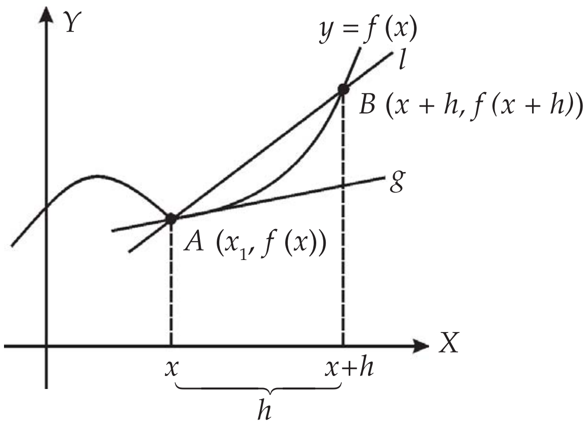
15. $y = \dfrac{4x}{\sqrt{1 - x}}$

B. Karakteristik Grafik Fungsi

Setelah Anda mempelajari teorema–teorema dan aturan rantai untuk mencari turunan suatu fungsi, sekarang Anda akan mempelajari penerapannya. Turunan dapat digunakan antara lain untuk menentukan persamaan garis singgung, menentukan sifat fungsi, mencari nilai maksimum dan minimum, perhitungan pada masalah fisika, ekonomi, dan sebagainya.

1. Persamaan Garis Singgung

Pada subbab sebelumnya, Anda telah mempelajari cara menentukan gradien garis singgung di suatu titik pada kurva dengan menggunakan limit fungsi. Cobalah Anda ingat kembali! Lalu, bagaimanakah cara menentukan gradien garis singgung kurva dengan menggunakan turunan? Untuk mengetahuinya, perhatikan gambar berikut ini!



Gambar 5.5

Garis l memotong kurva $y = f(x)$ di titik $A(x, f(x))$ dan $B\ (x + h, f\ (x + h))$. Jika titik B bergerak mendekati A sepanjang kurva, maka nilai h akan mendekati nol dan garis l akan menjadi garis g, yaitu garis singgung kurva di titik A. Gradien garis l adalah $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, dan gradien garis g adalah $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Dari subbab sebelumnya, Anda telah mengetahui bahwa $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ merupakan turunan dari fungsi f, yaitu $f\,'(x)$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $(x, f(x))$ adalah

$$f\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

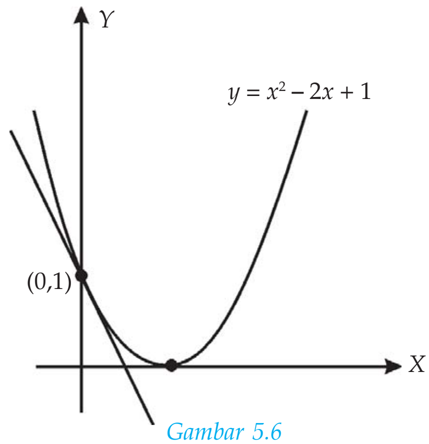
Selanjutnya, untuk mencari persamaan garis singgung perlu Anda ingat kembali persamaan garis melalui satu titik (x_1, y_1) dengan gradien m, yaitu dinyatakan sebagai $y - y_1 = m\ (x - x_1)$. Secara analog diperoleh:

Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $(a, f(a))$ adalah atau $y - f\ (a) = f\,'\ (a)$ atau $y = y\ (a) + f\,'\ (a)\ (x - a)$.

Untuk lebih mengetahui penggunaan persamaan di atas, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 5.11

1. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 2x + 1$ di titik (0,1)!

   Gambar 5.6

   Jawab:

   Gradien garis singgung adalah

   $m = y' = \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 1) = 2x - 2$

   Jika $a = 0$, maka $m = 2 . 0 - 2 = -2$.

   Persamaan garis singgung melalui (0,1) pada kurva adalah:

   $y - f(a) = m(x - a)$

   $y - 1 = -2(x - 0)$

   $y - 1 = -2x$

   $2x + y - 1 = 0$

2. Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ di titik yang absisnya –2!

   Jawab:

   $a = -2$ maka $f(a) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2(-2) - 5$

   $= -8 + 12 + 4 - 5$

   $= 3$

   Diperoleh titik singgung $(a, f(a))$ adalah (–2,3)

   Gradien singgungnya adalah

   $m = f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + 3x^2 - 2x - 5) = 3x^2 + 6x - 2$

   Untuk $a = -2$ maka $m = 3(-2)^2 + 6(-2)^{-2} - 2$

   $= 12 - 12 - 2$

   $= -2$

   Maka persamaan garis singgung melalui (–2,3) pada kurva adalah

   $y - f(a) = m(x - a)$

   $y - 3 = -2(x - (-2))$

   $y - 3 = -2(x + 2)$

   $y - 3 = -2x - 4$

   $2x + y - 3 + 4 = 0$

   $2x + y + 1 = 0$

3. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^3 - 7$ yang tegak lurus garis $y = \frac{1}{3}x + 2$!

Jawab:

Garis $y = \frac{1}{3}x + 2$ maka gradiennya $m_1 = \frac{1}{3}$

$$\begin{array}{c} y = \frac{1}{3}x + 2 \\ \downarrow\ \ \downarrow\downarrow\ \ \downarrow \\ y = m\,x + c \end{array}$$

Syarat garis singgung kurva adalah $m_1 . m_2 = -1$

$$\frac{1}{3} . m_2 = -1$$

$$m_2 = -3$$

Gradien garis singgung kurva adalah:

$$m_2 = y' = \frac{d}{dx}(x^3 - 7) = 3x$$

$$m_2 = 3x_1$$

$$-3 = 3x_1$$

$$x_1 = -1$$

Untuk $x_1 = -1$ maka $y_1 = (-1)^3 - 7 = -1 - 7 = -8$

Diperoleh titik garis singgung (x_1, y_1) adalah $(-1, -8)$.

Jadi, persamaan garis singgung pada kurva sebagai berikut.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m_2 (x - x_1) \\ y - (-8) &= -3 (x - (-1)) \\ y + 8 &= -3 (x + 1) \\ y + 8 &= -3x - 3 \end{aligned}$$

$3x + y + 8 + 3 = 0$

$3x + y + 11 = 0$

Berdasarkan beberapa contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

Syarat gradien di antara dua garis adalah
- ❑ Sejajar $\rightarrow m_1 = m_2$
- ❑ Berpotongan $\rightarrow m_1 \neq m_2$
- ❑ Tegak lurus $\rightarrow m_1 . m_2 = -1$
- ❑ Berimpit $\rightarrow m_1 = m_2$

Latihan 5

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tentukan persamaan garis singgung di titik:

   a. (1, 1) pada kurva $f(x) = \frac{1}{x}$

   b. (–2, 2) pada kurva $f(x) = x^2 - 4x - 1$

c. (3, 2) pada kurva $y = \sqrt{x+1}$

d. (–1, 2) pada kurva $y = 1 - x^3$

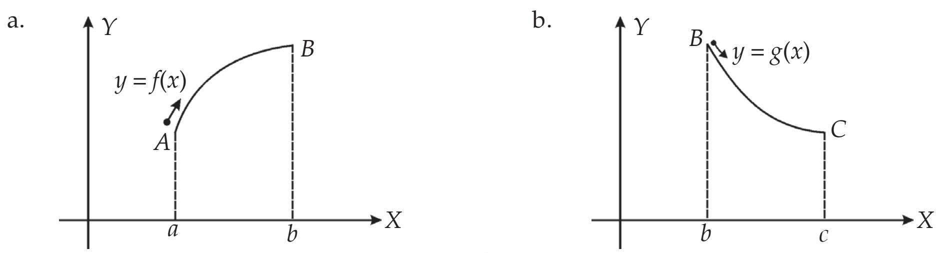
e. (2, 12) pada kurva $y = 5x^2 + 2x - 12$

2. Garis g sejajar dengan persamaan $x+5y - 1 = 0$ dan melalui titik (2,3). Tentukan persamaan garis g dan gambarlah grafiknya!
3. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik dengan absis –1 pada kurva $y = x^3 - x^2 + 6$!
4. Kurva $y = (x - 2)(x - 3)$ memotong sumbu X di titik–titik $P(2,0)$ dan $Q(6,0)$. Tentukan persamaan garis singgung di titik P dan Q!
5. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 2x - 3$ dan tegak lurus pada garis $x - 2y + 3 = 0$!

2. Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Agar Anda memahami fungsi naik dan fungsi turun, simaklah contoh berikut ini.

Bentuk jalan setapak yang dapat dilintasi pendaki gunung untuk mencapai puncak diwakili oleh kurva fungsi $y = f(x)$, sedangkan perjalanan pulangnya diwakili oleh kurva fungsi $y = g(x)$.



Gambar 5.7

Dari grafik gambar 5.7 di atas, fungsi bergerak naik dari lokasi A ke B, kemudian bergerak turun dari B ke C. Dalam bahasa matematika, fungsi $f(x)$ disebut fungsi naik dalam daerah interval $a \le x \le b$. Fungsi dikatakan naik apabila makin bertambah (ke kanan), maka nilai $f(x)$ semakin bertambah. Sedangkan fungsi $g(x)$ disebut fungsi turun dalam daerah interval $b \le x \le c$. Fungsi dikatakan turun apabila nilai x makin bertambah (ke kanan), maka nilai $g(x)$ semakin berkurang.

Untuk lebih jelasnya, simaklah contoh berikut.

Contoh 5.12

Tentukan batas–batas interval agar fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ naik atau turun!

Jawab:

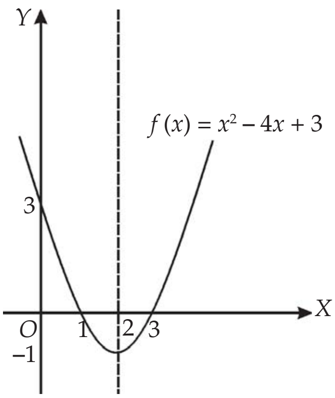
$f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \rightarrow \quad f(x) = ax + bx + c$

Karena koefisien x^2 adalah positif, persamaan tersebut adalah persamaan parabola terbuka ke atas. Sumbu simetri parabola adalah:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$$

Untuk $x = 2$, $f(2) = 2^2 - 4.2 + 3 = -1$

Grafik fungsinya adalah:



Gambar 5.8

Untuk membuat grafik tentukan terlebih dahulu titik–titiknya:

x	0	1	2	3
y	3	0	–1	0

Dari sketsa grafik dapat Anda lihat bahwa $f(x)$ naik pada $x > 2$ dan $f(x)$ turun pada $x < 2$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $f(x) = x^2 - 4x + 3$ naik pada $x > 2$ dan turun pada $x < 2$.

Berdasarkan contoh di atas, fungsi naik dan fungsi turun dapat didefinisikan sebagai:

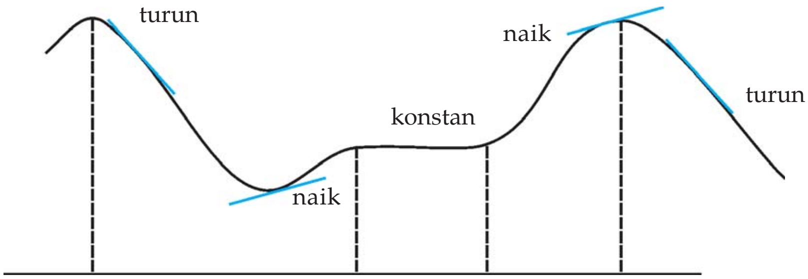
- Fungsi naik

  Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan naik pada suatu interval jika untuk setiap nilai x_1 dan x_2 pada interval itu, yaitu $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.

- Fungsi turun

  Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan turun pada suatu interval jika untuk setiap nilai x_1 dan x_2 pada interval itu, yaitu $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

Selanjutnya, hubungan antara turunan fungsi dengan fungsi naik atau fungsi turun dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 5.9

Perhatikan gambar 5.9. Pada fungsi naik, gradien garis singgungnya positif, sedangkan pada fungsi turun gradien garis singgungnya negatif.

Telah Anda ketahui bahwa gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di (x, y) adalah turunan dari $y = f(x)$ di (x, y), maka dapat disimpulkan bahwa:

- Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x dalam (x_1, y_1), maka $f(x)$ adalah fungsi naik pada (x_1, y_1).
- Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x dalam (x_1, y_1), maka $f(x)$ adalah fungsi turun pada (x_1, y_1).
- Jika $f'(x) = 0$ untuk setiap x dalam (x_1, y_1), maka $f(x)$ adalah fungsi konstan pada (x_1, y_1).

Untuk lebih memahami fungsi naik dan fungsi turun, pelajarilah contoh berikut ini.

Contoh 5.13

Tentukan interval agar fungsi $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ naik atau turun!

Jawab:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^3 + 3x^2 \\ f'(x) &= -2.3x^{3-1} + 3.\ 2x^{2-1} \\ &= -6x^2 + 6x \\ &= x(-6x + 6) \end{aligned}$$

Untuk menentukan interval $f(x)$ naik atau turun, ditentukan terlebih dahulu pembuat nol $f'(x)$ dan periksa nilai $f'(x)$ di sekitar titik pembuat nol.

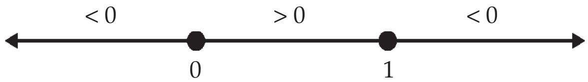
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x(-6x + 6) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ atau $-6x + 6 = 0$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$

Sehingga diperoleh $f'(x)$ berikut.



Untuk $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = -6(-1)^2 + 6(-1)$

$= -6 - 6$

$= -12$ (< 0)

Untuk $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = -6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{6}{4} + 3$

$= \frac{6}{4}$ (> 0)

Untuk $x = 2 \Rightarrow f'(2) = -6(2)^2 + 6(2)$

$= -24 + 12$

$= -12$ (< 0)

Jadi, $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ naik pada $0 < x < 1$ dan turun pada $x < 0$ dan $x > 1$.

Latihan 6

Kerjakan di buku tugas Anda!

Tentukan interval agar fungsi–fungsi berikut naik atau turun!

1. $f(x) = x^2(1 + x)$
2. $f(x) = (2x - 3)^2$
3. $f(x) = 2x\sqrt{x+4}$
4. $f(x) = 1 - x^2$
5. $f(x) = \sqrt{x}$
6. $y = x^3 + 3x^2 - 9x$
7. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$
8. $y = \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 2$
9. $y = x^2 - 2x - 3$
10. $y = x^2(2x - 3)$

Tugas Kelompok

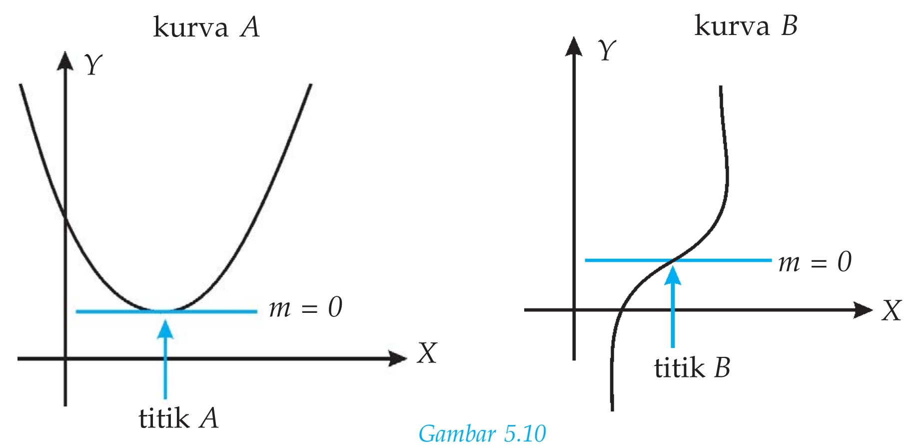
Kerjakan bersama kelompok Anda!

Buatlah kelompok yang terdiri dari 5 orang. Setelah Anda mengerjakan latihan 6 di atas, tugas Anda selanjutnya adalah menggambar grafik fungsi–fungsi yang terdapat pada latihan. Susunlah pekerjaan Anda dengan rapi dan berilah penjelasan untuk fungsi naik atau turun masing–masing soal!

3. Titik stasioner

a. Pengertian titik stasioner

Sebelumnya, Anda telah mempelajari hubungan antara turunan fungsi dengan fungsi naik atau fungsi turun. Lalu bagaimanakah hubungan turunan fungsi dengan fungsi konstan? Untuk mengetahuinya, Anda cermati dulu gradien garis singgung (m) pada gambar berikut ini.



Gambar 5.10

Pada kurva A, fungsi berhenti turun dan mulai naik setelah titik A. Sedangkan pada kurva B, fungsi berhenti naik untuk sementara dan mulai naik lagi setelah titik B. Titik A dan titik B disebut titik stasioner. Apakah titik stasioner itu?

> Titik stasioner adalah titik tempat fungsi berhenti naik atau turun untuk sementara, yaitu mempunyai gradien sama dengan nol.

Dari gambar di atas, terlihat jelas bahwa garis singgung yang melalui titik stasioner selalu sejajar sumbu x dengan gradien garis singgung di titik tersebut sama dengan nol. Karena gradien $m = 0$,

sedangkan $m = f'(x) = y'$ maka dapat dikatakan bahwa

Syarat stasioner adalah $f'(x) = 0$ atau $\frac{dy}{dx} = 0$

Penyelesaian persamaan $f'(x) = 0$ atau $\frac{dy}{dx}$ memberikan nilai x tempat titik stasioner terjadi. Fungsi $f(x)$ memiliki titik stasioner ketika $f'(x) = 0$, atau fungsi y memiliki titik stasioner ketika $y' = \frac{dy}{dx} = 0$.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.14

1. Tentukan titik stasioner dari kurva $y = x^2 - 3x + 5$!

   Jawab:

   $f'(x) = 2x - 3$

   Syarat stasioner: $f'(x) = 0$

   $2x - 3 = 0$

   $2x = 3$

   $x = \frac{3}{2}$

   Jadi, titik stasionernya adalah $\frac{3}{2}$.

2. Tentukan koordinat titik stasioner dari kurva $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$!

   Jawab:

   $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

   $y' = 3x^2 - 12x + 9$

   Syarat stasioner $y' = 0$

   Sehingga $3x^2 - 12x + 9 = 0$

   $(3x - 3)(x - 3) = 0$

   $3x - 3 = 0$ atau $x - 3 = 0$

   $3x = 3$ $\quad x = 3$

   $x = 1$

   untuk $x = 1 \rightarrow y = 1^3 - 6.\ 1^2 + 9.\ 1 + 2 = 6$

   untuk $x = 3 \rightarrow y = 3^3 - 6.\ 3^2 + 9.\ 3 + 2 = 2$

   Jadi, koordinat titik stasionernya (1,6) dan (3,2).

Latihan 7

Kerjakan di buku tugas Anda!

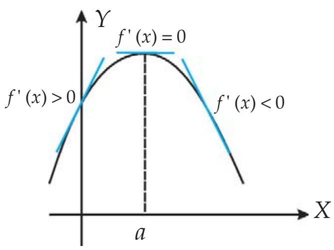
1. $f(x) = 2x^2 - 6x + 10$
2. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$
3. $y = (2x + 1)(4x - 3)$
4. $y = (2 - 3x)^2$
5. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$

b. Jenis stasioner

Misalkan, $f'(x) = 0$ untuk suatu konstanta a, maka titik stasioner terjadi ketika $x = a$ dan $y = f(a)$, sehingga koordinat titik stasionernya $(a, f(a))$.

Berikut ini terdapat empat jenis titik stasioner, yaitu

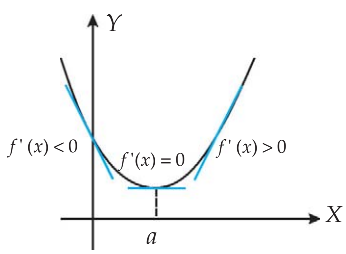
1) Titik balik maksimum pada titik $x = a$



Gambar 5.11

Jika $x < a$, maka $f'(x) > 0$
Jika $x > a$, maka $f'(x) < 0$

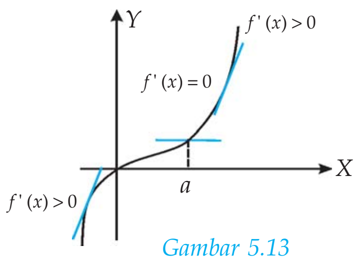
2. Titik balik minimum pada titik $x = a$



Gambar 5.12

Jika $x < a$, maka $f'(x) < 0$
Jika $x > a$, maka $f'(x) > 0$

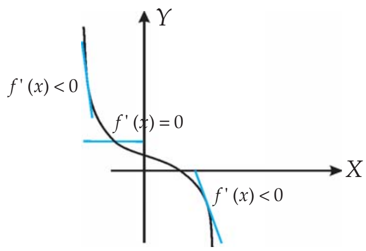
3. Titik belok stasioner positif pada titik $x = a$



Gambar 5.13

Jika $x < a$, maka $f'(x) > 0$
Jika $x > a$, maka $f'(x) > 0$

4. Titik belok stasioner negatif pada titik $x = a$



Gambar 5.14

Jika $x < a$, maka $f'(x) < 0$
Jika $x > a$, maka $f'(x) < 0$

Untuk lebih jelas, simaklah contoh berikut ini.

Contoh 5.15

Diketahui suatu fungsi $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$.

a. Carilah titik–titik stasioner untuk fungsi y!

b. Tentukan jenis dari titik–titik stasioner yang diperoleh!

Jawab:

a.
$$\begin{aligned} y &= 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4 \\ y' &= 2.\ 3x^{3-1} + 3.\ 2x^{2-1} - 12 \\ &= 6x^2 + 6x - 12 \end{aligned}$$

Syarat stasioner $y' = 0$

$$\begin{aligned} 6x^2 + 6x - 12 &= 0 \\ 6(x^2 + x - 2) &= 0 \\ 6(x - 1)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$x - 1 = 0$ atau $x + 2 = 0$

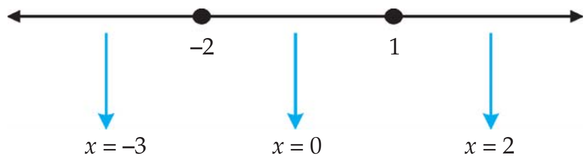
$x = 1$ $\quad$ $x = -2$

Untuk $x = -2 \rightarrow y = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) - 4 = -16 + 12 + 24 - 4 = 16$

Untuk $x = 1 \rightarrow y = 2.\ 1^3 + 3.\ 1^2 - 12.\ 1 - 4 = 2 + 3 - 12 - 4 = -11$

Jadi, titik–titik stasionernya adalah $(-2, 16)$ dan $(1, -11)$.

b. Untuk menentukan jenis titik stasioner, diperlukan informasi tanda turunan fungsi di sebelah kiri dan kanan titik stasioner. Oleh karena itu, kita perlu mengambil sampel titik uji di sebelah kiri dan kanan titik–titik stasioner.



Misalnya, dipilih titik–titik x = –3, x = 0 dan x = 2 sebagai sampel titik uji.

Untuk $x = -3$

$$\begin{aligned} y' &= 6(-3)^2 + 6(-3) - 12 \\ &= 54 - 18 - 12 \\ &= 24\ (> 0) \end{aligned}$$

Untuk $x = 0$

$$\begin{aligned} y' &= 6(0)^2 + 6.\ 0 - 12 \\ &= -12\ (< 0) \end{aligned}$$

Untuk $x = 2$

$$\begin{aligned} y' &= 6(2)^2 + 6.\ 2 - 12 \\ &= 24 + 12 - 12 \\ &= 24\ (> 0) \end{aligned}$$

Hasilnya dapat dituliskan dalam tabel, yaitu:

Tabel 5.1

x	–3	–2	0	1	2
y'	>0	0	<0	0	>0
bentuk grafik					

Dari tabel 5.1, terlihat bahwa
1) Titik balik maksimum adalah titik (–2,16)
2) Titik balik minimum adalah titik (1,–11)

Latihan 8

Kerjakan di buku tugas Anda!

Carilah titik–titik stasioner dan tentukan jenis stasionernya serta nilai maksimum dan minimum untuk fungsi–fungsi berikut ini!

1. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$

2. $f(x) = x^3 + x + 1$
3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6$
4. $f(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4) + 1$
5. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$
6. $y = 5x^3 - 3x^5$
7. $y = x^4 - 2x^3 + 1$
8. $y = x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 2$
9. $y = x^3(3x - 4)$
10. $y = x^5 - 15x^3$

Perhatikan hasil yang diperoleh dari contoh 5.15.

1) Dari titik balik maksimum (–2, 16), nilai $y = 16$ merupakan nilai maksimum.
2) Dari titik balik minimum (1, –11), nilai $y = -11$ merupakan nilai minimum.

Nilai maksimum dan nilai minimum disebut nilai ekstrim

Nilai maksimum dan nilai minimum dari suatu fungsi pada interval tertentu dapat ditentukan tanpa harus menggambar dulu. Bagaimanakah cara menentukannya? Pelajarilah contoh berikut ini!

Contoh 5.16

Tentukan nilai maksimum dan minimum untuk fungsi $f(x) = x^3 - 3x$ pada interval $-3 \le x \le 4$!

Jawab:

Fungsi $f(x) = x^3 - 3x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

Pada interval $-3 \le x \le 4$

Pojok kiri interval $x = -3$ maka $f(-3) = (-3)^3 - 3.(-3) = -27 + 9 = -18$

Pojok kanan interval $x = 4$ maka $f(4) = 4^3 - 3.4 = 64 - 12 = 52$

Syarat stasioner
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Untuk $x = -1 \rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 3(-1) = 3 + 3 = 6$

$x = 1 \rightarrow f'(1) = 3.1^2 - 3.1 = 0$

Dari nilai $f(x)$ dan $f'(x)$ diperoleh:

1) Nilai maksimum = 52
2) Nilai minimum = –18

Jadi, diperoleh interval $-18 \le f(x) \le 52$ untuk $-3 \le x \le 4$.

Latihan 9

Kerjakan di buku tugas Anda!

Tentukan nilai maksimum, nilai minimum, dan interval nilai $f(x)$ dari fungsi–fungsi berikut!

1. $f(x) = 3 - 2x$ pada interval $0 \le x < 5$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ pada interval $1 \le x \le 4$
3. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ pada interval $-2 \le x \le 1$
4. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x - 6$ pada interval $0 \le x \le 3$
5. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$ pada interval $x \le 2$
6. $y = (x - 2)^2 (x - 4)^2$ pada interval $1 \le x \le 6$
7. $y = 4x - x^2$ pada interval $-1 \le x \le \frac{3}{2}$
8. $y = (x - 2)(x - 1)^2$ pada interval $-1 \le x \le 3$
9. $y = \frac{1}{x^2+1}$ pada interval $0 \le x \le 4$
10. $y = 5$ pada interval $0 \le x < 4$

4. Sketsa Grafik dengan Turunan Pertama

Setelah Anda memahami titik stasioner dan jenis stasioner suatu fungsi, selanjutnya fungsi tersebut dapat Anda sajikan dalam sketsa grafik fungsi. Cara membuat sketsa grafik dengan menggunakan turunan pertama fungsi $f(x)$ dinamakan uji turunan pertama. Seperti apakah bentuk dari sketsa grafik suatu fungsi?

Untuk mengetahuinya, perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 5.17

Bentuk sketsa grafik fungsi $y = x^2 - 2x^2 + x$

Jawab:
Untuk membuat sketsa grafik fungsi, maka diperlukan informasi beberapa titik sebagai berikut.

a. Titik potong dengan sumbu x

Syarat $y = 0$

$x^3 - 2x^2 + x \quad = 0$

$x\,(x^2 - 2x + 1) \quad = 0$

$x = 0$ atau $\quad x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)\,(x - 1) = 0$

$x - 1 = 0$ atau $x - 1 = 0$

$x = 1 \qquad x = 1$

Jadi, koordinat titik potong dengan sumbu x adalah (0,0) dan (1,0).

b. Titik potong dengan sumbu y

Syarat $x = 0$

$y = 0^3 - 2.\ 0^2 + 0 = 0$

Jadi, titik potong dengan sumbu y adalah (0, 0).

c. Titik stasioner

$y = x^3 - 2x^2 + x$

$y\,' = 3x^2 - 4x + 1$

Syarat $y\,' = 0$

$3x^2 - 4x + 1 \quad = 0$

$(3x - 1)\,(x - 1) \quad = 0$

$3x - 1 = 0$ atau $x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{3} \qquad x = 1$

Jika $x = \frac{1}{3}$, maka:

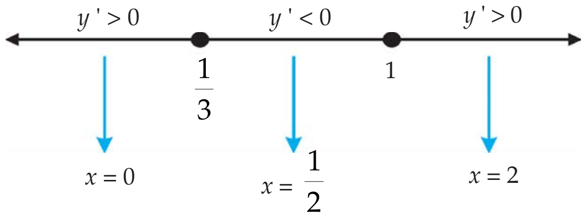
$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1-6+9}{27} \\ &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$

Jika $x = 1$, maka

$$\begin{aligned} y &= 1^3 - 2.\ 1 + 1 \\ &= 1 - 2 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi koordinat stasionernya adalah $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ dan (1,0).

d. Titik bantu (di kiri dan kanan titik stasioner).



Jika $x = 0$, maka $y' = 3.\ 0^2 - 4.\ 0 + 1 = 1 > 0$ (fungsi naik)

$y = 0^3 - 2.\ 0^2 + 0 = 0$

Jika $x = \frac{1}{2}$, maka

$$
\begin{aligned}
y' &= 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \\
&= \frac{3}{4} - 2 + 1 \\
&= -\frac{1}{4} < 0 \text{ (fungsi turun)} \\
y &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{8} - \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1-4+4}{8} = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Jika $x = 2$, maka

$$
\begin{aligned}
y' &= 3.\ 2^2 - 4.\ 2 + 1 \\
&= 12 - 8 + 1 \\
&= 5 > 0 \text{ (fungsi naik)} \\
y &= 2^3 - 2.\ 2^2 + 2 \\
&= 8 - 8 + 2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

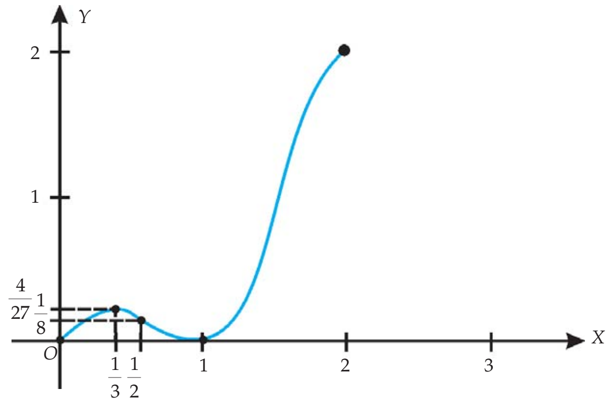
e. Hasil yang diperoleh dapat dituliskan dalam tabel, berikut.

Tabel 5.2

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	0	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{8}$	0	2
y'	>0		<0		>0
bentuk grafik					

Jadi, titik balik maksimum adalah titik $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ dan titik balik minimum adalah titik (1,0).

f. Sketsa grafik fungsi $y = x^3 - 2x^2 + x$ sebagai berikut.



Gambar 5.15

Berdasarkan contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

Langkah–langkah membuat sketsa grafik fungsi adalah sebagai berikut.
1. Menentukan koordinat titik potong dengan sumbu x, syarat $y = 0$.
2. Menentukan koordinat titik potong dengan sumbu y, syarat $x = 0$.
3. Menentukan titik stasioner dan jenis stasionernya.
4. Menentukan koordinat titik bantu (jika diperlukan).
5. Menyusun hasil yang dipilih dalam tabel (jika diperlukan).

Latihan 9

Kerjakan di buku tugas Anda!

Buatlah sketsa grafik dari fungsi–fungsi berikut!

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$
3. $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

4. $f(x) = \dfrac{1}{4-x^2}$

5. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$

6. $y = 3x^4 - 4x^3$

7. $y = x^4 + 2x^3 + 1$

8. $y = x^4 - x$

9. $y = (x-1)^2 (x+2)$

10. $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$

C. Penggunaan Turunan Fungsi

Dalam kehidupan sehari–hari, Anda tentu sering menghadapi permasalahan ketika ingin mendapatkan jalan terbaik dalam melakukan sesuatu hal. Misalnya, seorang petani ingin memiliki kombinasi hasil panen yang dapat menghasilkan keuntungan terbesar, dan seorang dokter ingin menentukan dosis obat yang terkecil untuk menyembuhkan suatu penyakit. Masalah–masalah tersebut dapat dirumuskan dengan melibatkan memaksimumkan dan meminimumkan suatu fungsi tertentu. Untuk lebih jelasnya, coba Anda perhatikan penggunaan turunan fungsi pada contoh berikut ini.

Contoh 5.18

1. Sebuah perusahaan ekspor dan impor memiliki x karyawan yang masing–masing memperoleh gaji $(180x - 3x^2)$ ribu rupiah per bulan.
   a. Berapa jumlah karyawan perusahaan tersebut agar total gaji seluruh karyawan maksimum?
   b. Berapa gaji untuk satu karyawan?

   Jawab:

   a. Dimisalkan:
   $$\begin{aligned} g(x) &= 180x - 3x^2 \\ g'(x) &= 180 - 3.2x \\ &= 180 - 6x \end{aligned}$$

   Menentukan titik stasioner:
   $$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ 180 - 6x &= 0 \\ 6x &= 180 \\ x &= \frac{180}{6} \\ x &= 30 \end{aligned}$$

   Jadi, jumlah karyawan perusahaan tersebut adalah 30 orang.

b. Jika $x = 30$, maka $g(30) = 180 \cdot 30 - 3(30)^2$

$$= 5400 - 2700$$
$$= 2700$$

Jadi, gaji masing–masing karyawan sebesar Rp2.700.000,00 per bulan.

2. Sebuah benda bergerak sepanjang suatu kurva. Pada saat t, posisi benda ditentukan oleh persamaan $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 9t$, dimana s dalam meter dan t dalam sekon.
   a. Kapankah partikel tersebut akan berhenti?
   b. Berapakah jarak maksimum yang ditempuh benda?

   Jawab:

   a. Panjang lintasan benda: $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 9t$

   Maka $s'(t) = \frac{1}{3} \cdot 3t^{3-1} - 3 \cdot 2 \cdot t^{2-1} - 3t^2 + 9t^{1-1}$

   $= t^2 - 6t + 9$

   Syarat benda berhenti adalah kecepatan $v = 0$

   Karena $v = s'(t)$ maka

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ s'(t) &= 0 \\ t^2 - 6t + 9 &= 0 \\ (t-3)(t-3) &= 0 \\ t - 3 &= 0 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

   Jadi, benda tersebut berhenti setelah 3 sekon.

   b. Jarak maksimum:

$$\begin{aligned} s(3) &= \frac{1}{3}(3)^3 - 3(3)^2 + 9(3) \\ &= 9 - 27 + 27 \\ &= 9 \end{aligned}$$

   Jadi, jarak maksimum yang ditempuh benda adalah 9 meter.

3. Andika akan memotong kayu triplek untuk membuat papan nama. Potongan kayu tersebut harus berbentuk persegi panjang yang luasnya 64 cm². Berapakah panjang dan lebar potongan kayu agar keliling potongan kayu tersebut minimum?

Jawab:

Luas persegi panjang $L = 64 \text{ cm}^2$

$$p \times l = 64$$

$$p = \frac{64}{l}$$

Keliling persegi panjang $K = 2(p + l)$

$$= 2\left(\frac{64}{l} + l\right)$$

$$= \frac{128}{l} + 2l$$

$$K = 128l^{-1} + 2l$$

Sehingga $K' = -128l^{-2} + 2$

$$= -\frac{128}{l^2} + 2$$

Syarat keliling minimum: $K' = 0$

$$K' = 0$$

$$\frac{-128}{l^2} + 2 = 0$$

$$\frac{128}{l^2} = 2$$

$$l^2 = \frac{128}{2}$$

$$l^2 = 64$$

$$l = \sqrt{64}$$

$$= \pm 8$$

Diperoleh $l = 8$ cm

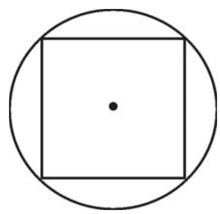
$$p = \frac{64}{l} = \frac{64}{8} = 8 \text{ cm}$$

Jadi, agar kelilingnya minimum, maka panjangnya harus 8 cm dan lebar 8 cm.

Latihan 10

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Reaksi terhadap obat serangga t jam setelah disemprotkan pada tanaman dapat dinyatakan sebagai $R(t) = 15t^2 - t^3$. Berapakah waktu yang diperlukan agar reaksinya maksimum?
2. Suatu roda berputar mengelilingi titik pusatnya. Sudut simpangan setiap titik pada roda tersebut pada waktu t dirumuskan sebagai $\theta(t) = 54t - \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3$. Berapakah besar sudut pada waktu kecepatan sudutnya sama dengan nol ($w(t) = 0$)?
3. Suatu proyek pembangunan gedung sekolah dapat diselesaikan dalam x hari dengan biaya proyek per hari $(3x - 900 + \frac{120}{x})$ ratus ribu rupiah. Agar biaya proyek minimum, berapa lama proyek tersebut harus selesai?
4. Tentukanlah dua bilangan asli yang jumlahnya 16 agar hasil kali salah satu bilangan dengan kuadrat bilangan lainnya menjadi maksimum?
5. Titik–titik sudut suatu siku persegi terletak pada lingkaran berjari–jari 1 cm. Tentukanlah ukuran persegi yang menghasilkan luas maksimum!



6. Sebuah kaleng berbentuk silinder tanpa tutup akan dibuat dari bahan logam. Kalau luas bahan yang digunakan adalah 300π cm^2, berapakah tinggi dan jari–jari kaleng agar volumenya maksimum?
7. Rangka sebuah jendela ialah setengah lingkaran yang bertumpu di atas sebuah persegi panjang dengan diameternya sama dengan lebar persegi panjang itu. Jika keliling rangka itu adalah 12 m, tentukanlah ukuran jendela itu agar cahaya matahari yang masuk sebesar–besarnya!
8. Suatu saluran air irigasi akan dibuat dari plat logam yang lebarnya 100 cm. Penampang melintangnya berbentuk persegi panjang tanpa sisi di bagian atasnya. Tentukanlah tinggi saluran air itu agar mampu mengalirkan air sebanyak–banyaknya!

9. Sebuah bola berjari–jari 8 cm melekat ke dinding dalam kerucut lingkaran tegak. Tentukanlah tinggi dan jari–jari alas kerucut agar volumenya maksimum!

10. Tentukanlah ukuran terbesar sebuah ruangan yang alas atapnya berbentuk bujursangkar agar dinding dan atapnya dapat dicat dengan bahan yang tersedia untuk seluas 1200 m²!

Rangkuman

1. Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' yang nilainya pada sembarang bilangan c

   $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$, apabila limit ini ada.

2. Laju rata–rata atau perubahan nilai fungsi f pada $x = c$ merupakan turunan fungsi f pada $x = c$, dinyatakan sebagai $f'(x) = \lim\limits_{h \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$.

3. Turunan suatu fungsi atas variabel x dinyatakan dengan notasi Leibniz, yaitu $\dfrac{dy}{dx} = y'$ atau $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x)$.

4. Teorema turunan fungsi

   a. Jika $y = f(x) = k$ dengan k konstanta, maka $f'(x) = 0$ atau $\dfrac{dy}{dx} = 0$.

   b. Jika $y = f(x) = x$ maka $f'(x) = 1$ atau $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x) = 1$

   c. Jika $y = f(x) = x^n$ dengan n bilangan rasional, maka $f'(x) = nx^{n-1}$ atau $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

   d. Jika f suatu fungsi dengan c suatu konstanta dan g fungsi yang didefinisikan oleh $g(x) = c.\,f(x)$ dan $f'(x)$ ada, maka $g'(x) = c\,f'(x)$ atau $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}(c.\,f(x)) = c\,f'(x)$.

e. Jika u dan v adalah fungsi–fungsi dari x yang dapat diturunkan, dengan $y = f(x) = u(x) + v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u + v) = u' + v'.$$

f. Jika u dan v adalah fungsi–fungsi dari x yang dapat diturunkan dan $y = f(x) = u(x) - v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u' - v) = u' - v'.$$

g. Jika u dan v adalah fungsi–fungsi dari x yang dapat diturunkan, dan $y = f(x) = u(x) . v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) . v(x) + u(x) . v'(x)$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u. v) = u'v + uv'$

h. Jika u dan v adalah fungsi–fungsi dar x yang dapat diturunkan, dan $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, untuk $v(x) \neq 0$, maka

$$f(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} \text{ atau } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

i. Jika $y = f(u) = u^n$ dengan $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ atau $y' = n . un^{-1} . u'$

5. Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $(x, f(x))$ adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

6. Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $(a, f(a))$ adalah $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ atau $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
7. Syarat gradien antara dua garis adalah
   a. Sejajar $\rightarrow m_1 = m_2$
   b. Berpotongan $\rightarrow m_1 \neq m_2$
   c. Tegak lurus $\rightarrow m_1 . m_2 = -1$
   d. Berimpit $\rightarrow m_1 = m_2$
8. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x dalam (x_1, y_1) maka $f(x)$ adalah fungsi naik pada (x_1, y_1).
9. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x dalam (x_1, y_1) maka $f(x)$ adalah fungsi turun pada (x_1, y_1).

10. Jika $f'(x) = 0$ untuk setiap x dalam (x_1, y_1) maka $f(x)$ adalah fungsi konstan pada (x_1, y_1).

11. Syarat stasioner adalah $f'(x) = 0$ atau $\frac{dy}{dx} = 0$.

12. Jenis titik stasioner
    a. Titik balik maksimum pada titik $x = a$
       Jika $x < a$ maka $f'(x) > 0$ dan jika $x > a$ maka $f'(x) < 0$
    b. Titik balik minimum pada titik $x = a$
       Jika $x < a$ maka $f'(x) < 0$ dan jika $x > a$ maka $f'(x) > 0$
    c. Titik belok stasioner positif pada titik $x = a$
       Jika x<a maka $f'(x) > 0$ dan jika $x > a$ maka $f'(x) > 0$
    d. Titik belok stasioner negatif pada titik $x = a$
       Jika $x < a$ maka $f'(x) < 0$ dan jika $x > a$ maka $f'(x) < 0$

Uji Kompetensi

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Dengan menggunakan definisi fungsi, tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = (x^2 + 1)(2 - 3x)$!

2. Tentukan turunan pertama fungsi $y = \frac{2x+1}{4x-3}$ dengan menggunakan notasi Leibniz!

3. Sebutir peluru ditembakkan dalam arah mendatar menuju dinding kaca. Jarak dalam satuan meter yang ditempuh peluru dalam t sekon dirumuskan sebagai $s(t) = 8 - (2 - t^2)$, untuk $0 \le t \le 3$. Berapakah kecepatan peluru setelah bergerak 2 sekon?

4. Dengan menggunakan teorema turunan fungsi, tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut!

    a. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

b. $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

c. $y = (x^3 - 1)(x^2 + 3x - 1)$

5. Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 + 2x^2 - x - 2)^4}$ dengan menggunakan aturan rantai!

6. Buktikan bahwa turunan dari fungsi $f(x) = \sqrt{x^3} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ adalah $\dfrac{3(x^3 + 1)}{2x^2\sqrt{x}}$!

7. Jika $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5}{x + 6}$ maka tentukan $f(0) + 6f'(0)$!

8. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^3 - 2x^2 + 4$ di titik (2,4)!

9. Kurva $y = x^2 + 4x - 5$ sejajar dengan garis $y = 2x + 3$. Tentukan persamaan garis singgungnya!

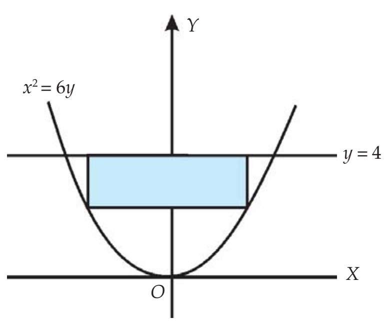
10. Tentukan interval fungsi naik atau turun dari $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 5$!

11. Suatu fungsi yang dirumuskan sebagai $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 8$ mempunyai titik stasioner untuk x + 1. Tentukan nilai a!

12. Tentukan nilai ekstrim dari fungsi $f(x) = 2x^3 - 23x + 10$ dalam interval $0 \leq x \leq 3$!

13. Buatlah grafik fungsi $y = x^4 - 32x$!

14. Tentukan titik belok dari fungsi $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$!

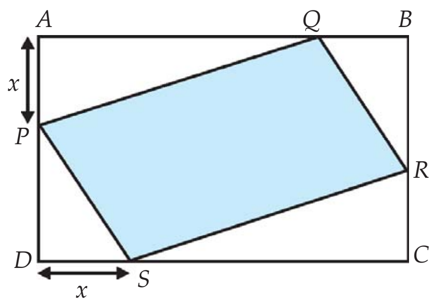
15. 

Tentukan luas persegi panjang terbesar yang dapat dibuat dalam daerah yang dibatasi oleh $x^2 = 6y$ dan $y = 4$!

Pengayaan

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Volume kotak tertutup yang alasya berbentuk persegi ialah 16 m^2. Harga setiap m^2 bahan alas dan bahan penutupnya, masing–masing lebih mahal 10% dan 20% daripada bahan muka tegaknya. Tentukanlah ukuran kotak itu agar biayanya minimum.
2. Seutas tali yang panjangnya 24 cm akan dipotong menjadi 2 bagian. Jika dari masing–masing potongan tali itu dibuat sebuah lingkaran dan sebuah persegi, maka tentukanlah ukuran masing–masing potongan itu agar jumlah luas kedua bagian itu minimum!
3. Perhatikan gambar berikut ini!



   Diketahui persegi panjang *ABCD* dengan panjang 10 cm dan lebar 6 cm. Tentukan nilai x agar diperoleh luas persegi panjang *PQRS* maksimum!
4. Sebuah kerucut akan ditempatkan di dalam tabung yang memiliki jari–jari alas r_1 dan tinggi t_1. Tentukan volume maksimum kerucut agar dapat ditempatkan dalam kerucut?

Kerjakan soal–soal di bawah ini dengan benar!

1. Domain dari fungsi $f(x)=\dfrac{x+2}{x+3}$ adalah ....

   a. $\{x \mid x \neq -3, x \in R\}$
   b. $\{x \mid x \neq -2, x \in R\}$
   c. $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$
   d. $\{x \mid x \neq 2, x \in R\}$
   e. $\{x \mid x \neq 3, x \in R\}$

2. Suatu fungsi $f : R \to R$, dan $g : R \to R$ didefinisikan sebagai $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x + 5$. Jika $g(x) = x + 1$, maka $f(x)$ ....

   a. $x^2 - x$
   b. $x^2 - x - 3$
   c. $x^2 + x - 3$
   d. $x^2 - x + 3$
   e. $x^2 + x + 3$

3. Diketahui $f(x) = 3x - 1$ dan $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 6x + 4$. Hasil dari $(f \circ g)(x)$ ....

   a. $3x^2 + 8$
   b. $3x^2 - 8$
   c. $-3x^2 + 8$
   d. $-3x^2 + 10$
   e. $-3x^2 - 10$

4. Jika fungsi $f(x) = \dfrac{2x-5}{3x-2}$ dengan $x \neq \dfrac{2}{3}$, maka $f^{-1}(1) = ...$

   a. -11
   b. -7
   c. -3
   d. $\dfrac{2}{3}$
   e. 11

5. Fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$ dirumuskan dengan $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $x \neq 0$ dan $g(x) = x - 3$, maka $(gof)^{-1}(x) = ...$

   a. $\dfrac{2-3x}{x-1}$
   b. $\dfrac{2+3x}{x+1}$
   c. $-\dfrac{1}{x+2}$
   d. $\dfrac{4x-1}{x}$
   e. $\dfrac{x-2}{x}$

6. Nilai dari $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}{x-2}$ = ...

a. 2
b. 1
c. $\frac{1}{2}$
d. 0
e. $-\frac{1}{2}$

7. Nilai dari $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x+1}{2-\sqrt{4x+6}}$ = ...

a. 4
b. 2
c. 0
d. –1
e. –2

8. Nilai dari $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-4x}}{x}$ = ...

a. 0
b. $\frac{1}{3}$
c. $\frac{1}{2}$
d. 1
e. 2

9. Nilai dari $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(4+5x)(2-x)}{(2+x)(1-x)}$ = ...

a. $-\infty$
b. $\frac{1}{5}$
c. 2
d. 5
e. ∞

10. Jika nilai dari $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{px+q-\sqrt{x}}{x-4} = \dfrac{3}{4}$, maka $p + q$ = ...

a. 1
b. 2
c. 4
d. $-\frac{1}{2}$
e. $\frac{1}{2}$

11. Turunan pertama dari $f(x) = (1 - x)^2 (2x+3)$ adalah ....
   a. $(1 - x)(3x + 2)$
   b. $(x - 1)(3x + 2)$
   c. $2(1 + x)(3x + 2)$
   d. $2(x - 1)(3x + 2)$
   e. $2(1 - x)(3x + 2)$
12. Fungsi $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 4$ naik pada interval ....
   a. $1 < x < 5$
   b. $-5 \leq x \leq -1$
   c. $-5 \leq x \leq 1$
   d. $-1 \leq x \leq 5$
   e. $x \leq 1$ atau $x \geq 5$
13. Garis singgung pada kurva $y = x^2 + 5$ yang sejajar dengan garis $12x - y = 17$ menyinggung kurva di titik ....
   a. (6,41)
   b. (5,30)
   c. (7,40)
   d. (3,45)
   e. (2,29)
14. Sebuah benda diluncurkan ke bawah pada suatu permukaan yang miring dengan persamaan gerak $s = t^3 - 6t^2 + 12t + 1$. Waktu yang dibutuhkan agar kecepatan benda menjadi 27 m/s adalah ... sekon.
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   e. 5
15. Ditentukan kurva dengan persamaan $y = x^3 + px^2 + q$. Garis $y = -8x + 12$ menyinggung kurva di titik dengan absis 2. Nilai q adalah ....
   a. 8
   b. 5
   c. –1
   d. –5
   e. –8,75

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan benar!

1. Tentukan mana yang merupakan fungsi injektif, surjektif atau bijektif fungsi $f : R \to R$ yang ditentukan sebagai berikut.
   a. $f : x \to 5x - 2$
   b. $f : x \to \dfrac{x^2+3}{5}$
   c. $f(x) \to \dfrac{1}{3}x - 3$
2. Diketahui $f(x) = -x - 2$. Tentukan nilai dari $2(f(x))^2 + f(x^2) - 3f(x)$ untuk $x = -3$!
3. Fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$ ditentukan oleh $g(x) = x + 3$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x - 2$. Tentukan $f(x{-}2)$!
4. Jika $f : R \to R$ dan $g : R \to R$ ditentukan dengan $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $x \neq 0$ dan $(f \circ g)(x) = \dfrac{3x}{x-2}$, $x \neq 2$, maka tentukan $g^{-1}(x)$!
5. Dengan menggunakan teorema limit, tentukan nilai limit dari fungsi $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x+3}\left(\dfrac{1}{x-7} - \dfrac{2}{x-1}\right)$!
6. Tentukan konstanta a dan b agar $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{ax+b\sqrt{x}-2} = 8$!
7. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{18x^2-x+1}-3x}{\sqrt{x^2+2x}}$!
8. Bila diketahui $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{(1-3x)^2}$, tentukan dan $f'(x)$ dan $f'(-3)$!
9. Tentukan nilai ekstrim dari fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 6$ dalam interval $2 \leq x \leq 4$!
10. Gambarkan grafik fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$!

BSNP. 2006. *Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika untuk SMA/MA*. Jakarta: BSNP.

Harinaldi. 2005. *Prinsip–Prinsip Statistik untuk Teknik dan Sains*. Jakarta: Erlangga.

Husaini Usman dan Purnomo Setiady Akbar. 2003. *Pengantar Statistika*. Cetakan ketiga. Jakarta: Bumi Aksara.

Koko Martono. 1999. *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga.

Lipschutz, S. 1989. *Seri Buku Schaum Teori dan Soal–Soal Teori Himpunan*. Jakarta: Erlangga.

Lipschutz, S. dan Hall, G.G. 1988. *Seri Buku Schaum dan Soal–Soal Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

M Iqbal Hasan. 2003. *Pokok–Pokok Materi Statistik* I. Edisi kedua. Jakarta: Bumi Aksara.

Negoro, St. dan B. Harahap. 2005. *Ensiklopedia Matematika*. Cetakan kelima. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Purcell, E.J dan Varberg, D. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I* (*Terjemahan*). Edisi kelima. Jakarta: Erlangga.

Spiegel, M.R. 1995. *Seri Buku Schaum Teori dan Soal–Soal Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Stroud, K.A. 1987. *Matematika untuk Teknik* (*Terjemahan*). Jakarta: Erlangga.

Supramono dan Sugiarto.1993. *Statistika*. Cetakan pertama. Yogyakarta: Andi Offset.

Glosarium

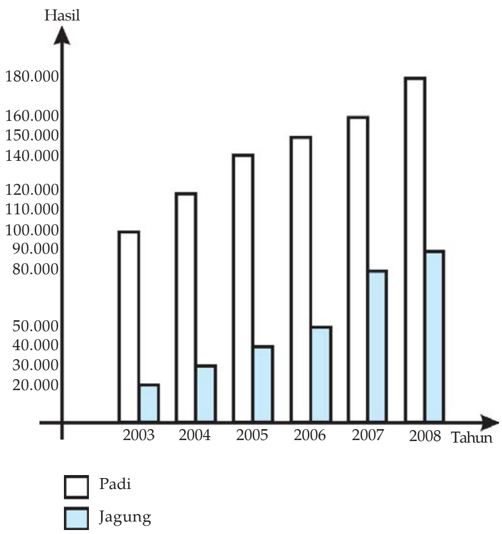
angket	:	daftar pertanyaan tertulis mengenai masalah tertentu dengan ruang untuk jawaban bagi setiap pertanyaan
data	:	kumpulan dari informasi atau keterangan yang diperoleh, baik dalam bentuk angka dan bukan angka (tulisan)
data kualitatif	:	data yang menunjukkan keadaan atau sifat objek
data kuantitatif	:	data yang menunjukkan jumlah atau ukuran objek
desil	:	nilai pembatas yang membagi data terurut menjadi sepuluh bagian yang sama
deviasi	:	titik tengah dikurangi rata-rata sementara
diagram batang	:	diagram penyajian data dalam bentuk batang atau kotak
diagram garis	:	diagram penyajian data dalam bentuk garis
diagram lingkaran	:	diagram penyajian data dalam bentuk lingkaran
diagram	:	gambaran (buram, sketsa) untuk memperlihatkan atau menerangkan sesuatu
faktorisasi	:	uraian menjadi faktor-faktor
frekuensi	:	banyaknya suatu data muncul
histogram	:	diagram yang menyajikan data dari tabel distribusi frekuensi dengan bentuk batang tegak dan berimpitan
interval	:	jarak yang terletak antara dua nilai yang diketahui
jangkauan	:	ukuran terbesar dikurangi ukuran terkencil
kejadian	:	himpunan bagian dari ruang sampel
kejadian bersyarat	:	kejadian munculnya suatu kejadian A jika disyaratkan kejadian munculnya kejadian B terlebih dahulu.

kejadian majemuk	:	suatu kejadian yang mempunyai titik sampel lebih dari satu.
kejadian sederhana	:	suatu kejadian yang hanya mempunyai suatu titik sampel
kuartil	:	membagi ukuran yang telah berurutan menjadi empat bagian yang sama
limit	:	batas; tapal batas
notasi	:	seperangkat atau sistem lambang (tanda) yang menggambarkan bilangan
observasi	:	peninjauan secara cermat
ogive	:	diagram yang menyajikan data dari tabel distribusi frekuensi kumulatif
poligon frekuensi	:	diagram garis yang menghubungkan setiap titik tengah batang bagian atas dari suatu histogram
populasi	:	seluruh obyek yang akan diteliti
rata–rata	:	hasil jumlah nilai data dibagi banyak data
ruang sampel	:	himpunan semua kejadian yang mungkin diperoleh dari suatu percobaan
sampel	:	bagian dari populasi yang benar-benar diamati
statistik	:	kumpulan angka atau nilai yang menggambarkan karakteristik suatu kumpulan data
statistika	:	ilmu pengetahuan yang berhubungan dengan cara-cara pengumpulan, pengolahan, penyajian, dan penafsiran data serta penarikan kesimpulan dari data tersebut
tabel baris kolom	:	kumpulan data yang disajikan dengan tabel berbentuk baris dan kolom
tabel distribusi frekuensi	:	kumpulan data yang disajikan dengan tabel bersama frekuensinya.
titik sampel	:	setiap anggota ruang sampel atau kejadian yang mungkin
titik tengah kelas	:	nilai yang dapat dianggap mewakili kelas tersebut

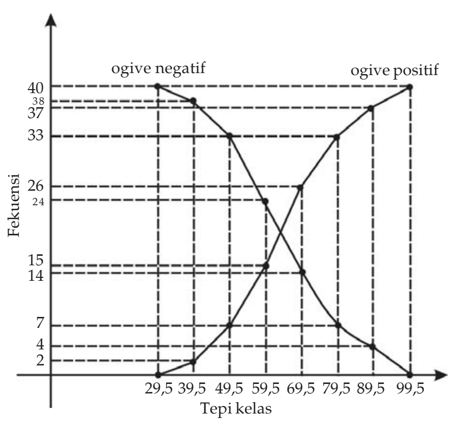
Bab 1
STATISTIKA

Uji Kompetensi

1. Diagram batang



3. Ogive positif dan ogive negatif



5. Jumlah nilai = 11
7. Jumlah siswa = 34 siswa
9. Median = 33,28

11. Statistik lima serangkai

$Q_2 = 162$	
$Q_1 = 158$	$Q_3 = 165{,}75$
$x_{min} = 145$	$x_{maks} = 181$

13. a. Jangkauan = 190
    b. Langkah = 90
    c. Pagar dalam = 150
       Pagar luar = 390

15. $a = 6$

Bab 2
PELUANG

Uji Kompetensi

1. 56 cara
3. a. 90
   b. 73.440
   c. 78.960.960
   d. 17.297.280
   e. 5.273.912.160
5. 75.600 susunan
7. $x = 3$
9. $n = 11$
11. a. 70 kali
    b. 220 kali
13. $\frac{7}{36}$
15. a. $\frac{4}{15}$
    b. $\frac{8}{45}$

UJI SEMESTER GASAL

I. Pilihan Ganda

1. b	9. a
3. e	11. d
5. e	13. a
7. a	15. c

II. Uraian

1. a. Tabel distribusi frekuensi

Tinggi Badan	Frekuensi
154–159	13
160–165	11
166–171	3
172–177	0
178–183	0
184–189	3

b. Statistik lima serangkai

$Q_2 = 161$	
$Q_1 = 158$	$Q_3 = 163$
$x_{min} = 154$	$x_{maks} = 188$

3. karyawan pria : wanita = 4 : 1

5. a. simpangan rata-rata = 9,03

b. variansi = 146,42

simpangan baku = 12,10

7. $\frac{27}{100}$

9. $\frac{1}{8}$

Bab 3

FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

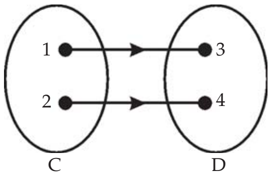
Uji Kompetensi

1. Domain = {a, b, c, d, e}

Kodomain = {1, 2, 3, 4}

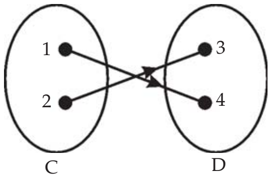
Range = {1, 2, 3}

3. ❑



atau {(1, 3), (2, 4)}

❑



atau {(1, 4), (2, 3)}

5. –3

7. $\{-3 \leq (g \circ f)(x) \leq 6\}$

9. $\frac{10}{x^3 - 1}$

11. $x = 2$

13. $\frac{1}{2(1-x)}$

15. $\sqrt{\frac{9-8x}{x-2}}$

Bab 4
LIMIT FUNGSI

Uji Kompetensi

1. a. 0
   b. 1
   c. 2

2. $-\frac{1}{3}$

5. 3

7. $\frac{1}{2}$

9. Terbukti

11. 0

13. $-\frac{3}{25}$

15. $\frac{5}{2\sqrt{26}}$

BAB 5
TURUNAN FUNGSI

Uji Kompetensi

1. $-9x^2 + 4x - 3$

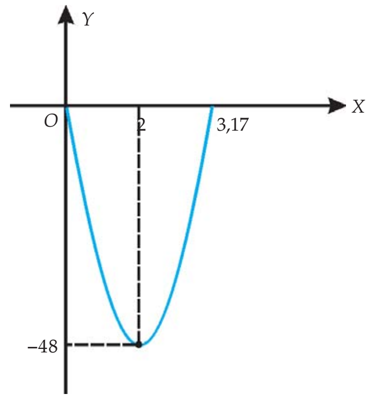
3. 0

5. $\frac{-4\left(3x^2+4x-1\right)}{\left(x^3+2x^2-x-2\right)^5}$

7. 0

9. $y - 2x + 6 = 0$

11. $a = -12$

13. 

15. Luas terbesar = 4

UJI SEMESTER GENAP

I. Pilihan Ganda

1. a	9. d
3. a	11. d
5. c	13. e
7. e	15. a

II. Uraian

1. a. Fungsi bijektif
   b. Fungsi surjektif
   c. Fungsi bijektif

2. $x^2 - 7x + 8$

3. $-\frac{5}{24}$

7. $3\sqrt{2}$

9. Nilai ekstrim:
   - Nilai maksimum = 8
   - Nilai minimum = –94

MATEMATIKA

Untuk SMA/MA Program Studi IPS Kelas XI

Apabila sebuah pertanyaan dilontarkan kepada siswa, bagaimana pendapat Anda tentang Matematika? Beragam jawaban mereka, dari Matematika sulit, membuat pusing, membosankan, sampai dengan Matematika menakutkan. Namun, coba bayangkan jika manusia tidak mengenal Matematika! Apakah perkembangan IPTEK dapat semaju dan sepesat ini?

Buku ini mencoba menjelaskan teori-teori Matematika dengan lugas dan mengaitkan setiap konsep dengan peristiwa sehari-hari. Masalah-masalah kontekstual dan pendekatan pemecahan masalah menjadi fokus dalam penyajian setiap konsep dalam buku ini. Dengan mengajukan masalah kontekstual, siswa dibimbing untuk menguasai konsep Matematika.

Dalam buku ini disajikan berbagai permasalahan dan tugas-tugas individu sehingga siswa dapat dibekali dengan kemampuan berpikir logis, sistematis, kritis, dan kreatif. Diharapkan kelak para siswa dapat menguasai dan menciptakan teknologi di masa depan. Selain itu, dalam buku ini juga disajikan tugas kelompok yang dirancang untuk menumbuhkan kemampuan bekerja sama dan sikap ilmiah siswa. Dengan demikian, kemampuan kognitif, afektif, dan psikomotorik siswa dapat terbentuk secara optimal.

Semoga dengan hadirnya buku ini, Matematika dapat dekat, melekat, dan memikat di hati siswa. **Selamat Belajar Semoga Kesuksesan Menyertai Anda!**

ISBN 978-979-068-846-9 (no.jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-851-3

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor: 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

Harga Eceran Tertinggi (HET) Rp**11.852**,--

Sri Lestari
Diah Ayu Kurniasih

MATEMATIKA

Untuk SMA/MA
Program Studi IPS Kelas XI